Primera Edición

Cálculo Diferencial e Integral

Con aplicaciones

Instituto Tecnológico de Costa Rica

$\lim_{x \to 0} f(x)$

Prof. Elsie Hernández S.



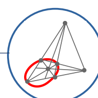
Revista digital Matemática, Educación e Internet
www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, CON APLICACIONES.

Actualización, Febrero 2013.

Prof. Elsie Hernández S.,
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica.
(www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)





Textos Universitarios
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)

Correo Electrónico: wmora2@gmail.com
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Elsie Hernández S.
Cálculo diferencial e integral, con aplicaciones. 1ra ed.
– Escuela de Matemática,Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2009.
371 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9968-641-05-0
1. Cálculo. 2. Derivada 3. Integral.

Contenido

Prefacio vi

1 Limites y continuidad de funciones 1

1.1 Idea intuitiva de límite 1
1.1.1 Generalización del concepto de límite 4
1.1.2 Formalización de la idea intuitiva de límite 6
1.1.3 Definición de límite 7
1.1.4 Límites laterales 11
1.1.5 Definición de límites laterales o unilaterales 12
1.1.6 Teoremas fundamentales sobre límites 15
1.1.7 Otros aspectos sobre límites 23
1.1.8 Límites que involucran funciones trigonométricas 28
1.1.9 Límites infinitos y límites al infinito 35
1.1.10 Teoremas sobre límites infinitos 44
1.1.11 Límites que involucran la función exponencial y la función logarítmica 60
1.2 Continuidad de funciones 65
1.2.1 Introducción 65
1.2.2 Definición de continuidad 67
1.2.3 Discontinuidades evitables 69
1.2.4 Continuidad en un intervalo [a,b] 71
1.2.5 Definición de continuidad utilizando ϵ y δ 73
1.2.6 Teoremas sobre continuidad de funciones 73
1.2.7 Algunas propiedades de las funciones continuas 76
1.2.8 Continuidad y funciones 80
1.2.9 Propiedades de las funciones inversas 83
1.2.10 Valores máximos y mínimos para funciones continuas 85

2 Derivada de una función 90

2.1 Introducción 90
2.2 La derivada de una función 99
2.3 Notaciones para la derivada de una función 102
2.4 Continuidad y derivabilidad 102
2.5 Teoremas sobre derivadas 106
2.6 Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena) 112
2.7 Diferenciales. Interpretación geométrica 116
2.7.1 Incrementos 116
2.7.2 Diferenciales 119
2.8 Derivadas de orden superior 123
2.9 Derivada de la función logarítmica 127
2.10 Derivada de la función exponencial 130
2.11 Derivadas de la funciones trigonométricas 132
2.12 Derivadas de las funciones inversas 137
2.13 Las funciones trigonométricas inversas y sus derivadas 138
2.14 Funciones paramétricas 154
2.15 Funciones implícitas y su derivada 158
2.15.1 Derivada de segundo orden para una función dada en forma implícita 162
2.16 Teorema de Rolle 164
2.17 Teorema del valor medio para derivadas (Lagrange) 167
2.18 Teorema de Cauchy del valor medio (o extensión del teorema del valor medio para derivadas) 169
2.19 Regla de L'Hôpital 171
2.19.1 Introducción 171
2.19.2 Regla de L'Hôpital 172
2.19.3 Aplicación de la Regla de L'Hôpital a otras formas indeterminadas 176
2.19.4 Límites que presentan la forma "$0 \cdot \infty$" 178
2.19.5 Otras formas indeterminadas 180

3 Aplicaciones de la Derivada 188

3.1 Funciones crecientes y decrecientes y su relación con la derivada 188
3.2 Valor máximo y valor mínimo de una función 191
3.3 Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y los mı̆inimos de una función 194
3.4 Concavidad y puntos de inflexión 198
3.5 Criterio de la segunda derivada para establecer los valores máximos y los valores mı̆inimos de una función 204
3.6 Trazo de curvas 206
3.7 Asíntotas 206
3.8 Resolución de problemas de máximos y mínimos: 220

4 Razones de Cambio Relacionadas 232

4.1 Introducción 232
4.2 Problemas de Razones Relacionadas 233

5 Integral Indefinida 246

5.1 Integral Indefinida 246

5.2 Fórmulas y métodos de integración 247
5.2.1 Regla de la cadena para la antiderivación 247
5.2.2 Integral de la función exponencial de base e 249
5.2.3 Integral de la función exponencial de base “a” $(a > 0, a \neq 1)$ 250
5.2.4 Integral que da como resultado la función logaritmo natural 251
5.2.5 Integrales de las funciones trigonométricas 253
5.2.6 Integrales que involucran potencias y productos de funciones trigonométricas 263
5.2.7 Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas inversas 272
5.3 Técnicas de Integración: Método de sustitución: 278
5.4 Métodos de Integración: Integración por partes 283
5.5 Integración por sustitución trigonométrica 289
5.5.1 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ con $a > 0$, $b > 0$ 294
5.5.2 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ con $a > 0$ y $b > 0$ 298
5.5.3 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ 301
5.6 Integración de fracciones racionales 304

6 Integral Definida 313

6.1 Introdución 313
6.2 La integral definida 315
6.2.1 Propiedades fundamentales de la integral definida 321

7 Aplicaciones de la Integral Definida 328

7.1 Cálculo de áreas 330
7.2 Área de una región comprendida entre dos curvas 332
7.3 Volúmenes de sólidos de revolución 338
7.4 Longitud de una curva plana 353
7.5 Cálculo de trabajo con ayuda de la integral definida 356

Bibliografía 361

Apéndice A: Créditos 362

Prefacio

Este es un libro de cálculo diferencial e integral escrito por la profesora Elsie Hernández Saborio, profesora pensionada del Instituto Tecnológico de Costa Rica. La primera versión apareció en los años 80. Era una versión en papel digitada en las antiguas máquinas de escribir. Esta versión digital fue impulsada por el deseo de rescatar la obra de una profesora muy calificada en la enseñanza de la matemática. Por completitud, se incluye un capítulo sobre "Relaciones Relacionadas" escrito por la profesora Sharay Meneses, también profesora pensionada del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Esta versión estará en revisión en todo este I semestre de 2013.

WALTER MORA F., EDITOR.

Cartago, Costa Rica. Febrero 2013.

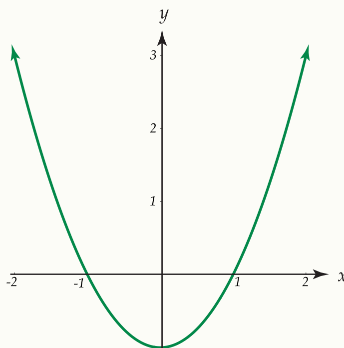
1 LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1.1 Idea intuitiva de límite

En este capítulo vamos a presentar la idea formal de límite como una operación aplicada a una función en un punto. Se establecerán también algunos teoremas sobre límites de sumas, productos y cocientes de funciones. Iniciaremos nuestro estudio con la idea intuitiva de límite.La presentación de los ejemplos siguientes pretenden dar una idea del significado del límite de una función en un punto.

Ejemplo 1.1

Consideramos la función definida por $f(x) = x^2 - 1$ con dominio en $\mathbb{R}$.
La representación gráfica es la siguiente:



Nos interesa observar el comportamiento de la función f para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

Veamos las tablas siguientes:

x	$f(x) = x^2 - 1$
1,25	0,5625
1,5	1,25
1,75	2,0625
1,9	2,61
1,99	2,9601
1,999	2,996
1,9999	2,9996
1,99999	2,99996

x	$f(x) = x^2 - 1$
2,75	6,5625
2,5	5,25
2,25	4,0625
2,1	3,41
2,01	3,0401
2,001	3,004
2,0001	3,0004
2,00001	3,00004

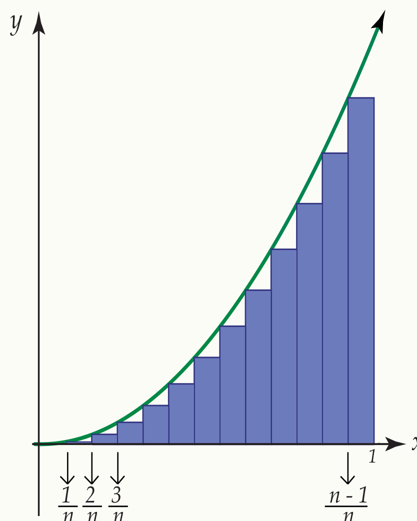
Puede observarse de ambas tablas que, conforme x se aproxima más a 2, $f(x)$ toma, cada vez, valores más próximos a 3.

En otras palabras, al restringir el dominio de la función a valores cada vez "más cercanos a 2", el conjunto de imágenes o sea, los valores que toma la función, se "acercan cada vez más a tres".

En este caso se dice que cuando x tiende a 2, que se simboliza $x \to 2$, entonces $f(x) \to 3$, o sea $f(x)$ tiende a 3. Utilizando la notación de límites escribimos $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, que se lee: el límite de $f(x)$, cuando x tiende a 2, es igual a 3.

Ejemplo 1.2

Nos interesa calcular el área de región limitada por la parábola con ecuación $y = x^2$, el eje X y la recta de ecuación $x = 1$.
La representación gráfica de esta región es la siguiente:



Dividimos el intervalo $[0,1]$ en partes iguales señaladas por los valores:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1$$

Formando sobre cada una de las partes, un rectángulo cuyo lado vertical izquierdo toca a la parábola en un punto, y cuya base mide $\frac{1}{n}$ en cada caso. Luego, el área de cada uno de estos rectángulos podemos expresarla como sigue:

$$A_1 = 0 \cdot \frac{1}{n}, A_2 = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2, A_3 = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2, A_4 = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2, ..., A_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

Ejemplo 1.2 (continuación).

Así, la suma S_n de todas la áreas de los rectángulos está dada por la siguiente igualdad:

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot 0 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

de donde $S_n = \dfrac{1+2^2+3^2+...+(n-1)^2}{n^3}$

Como $1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2 = \dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$, cuya prueba está al final del capítulo, entonces:

$$S_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

de donde $S_n = \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{6n^2} - \dfrac{1}{2n}\right)$

Tomando $r_n = \dfrac{1}{6n^2} - \dfrac{1}{2n}$ entonces $S_n = \dfrac{1}{3} + r_n$

Observemos que si a "n" se le asignan valores positivos cada vez más grandes, entonces r_n se aproxima a cero.

Si en la figura anterior se aumenta el número n de divisiones del intervalo, entonces crece el número de rectángulos y la suma S_n de las áreas de ellos se aproxima al área de la figura curvilínea.

Como r_n se aproxima a cero cuando n crece indefinidamente, puede decirse que $S_n = \dfrac{1}{3} + r_n$ se aproxima al número $\dfrac{1}{3}$, y así el área de la región tiende a $\dfrac{1}{3}$.

La expresión "n toma valores positivos cada vez mayores" puede sustituirse por $n \to +\infty$, (n tiende a más infinito) y como $S_n \to \dfrac{1}{3}$, (S_n tiende a $\dfrac{1}{3}$ cuando $n \to +\infty$) , entonces, volviendo a utilizar la notación de límites escribimos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + r_n\right) = \frac{1}{3}$$

que se lee: el límite de S_n, cuando n tiende a más infinito, es $\dfrac{1}{3}$.

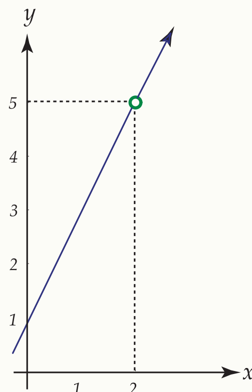
Es importante señalar que al estudiar el límite de una función, no se menciona el valor que toma la función exactamente en el punto. Así, en el ejemplo 1.1, no importa cuál es el valor de $f(2)$, sino el valor de $f(x)$ cuando x tiende a 2. Esto se debe a que el concepto de límite de una función en un punto es independiente del valor que toma la función en este.

Puede suceder que en dicho punto la función no esté definida y aún así exista el límite. El siguiente ejemplo presenta esta situación.

Ejemplo 1.3

Sea f la función definida por la ecuación $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ para toda $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

La representación gráfica de f es:



De la gráfica puede observarse que, aunque la función f no está definida para $x = 2$, cuando x toma valores muy cercanos a 2 la función se aproxima a 5, lo que escribimos como:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

1.1.1 Generalización del concepto de límite

Sea f una función definida para valores reales en los alrededores de un número b, aunque no necesariamente en b mismo, como se representa gráficamente a continuación:

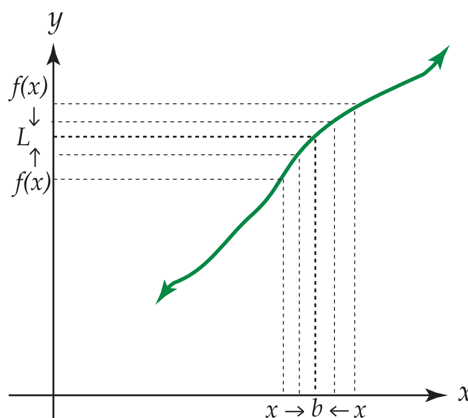


Figura 1.1 $\lim_{x \to b} f(x) = L, f(b) = L$

Se observa que cuando $x \to b$ entonces $f(x) \to L$ lo que se escribe como: $\lim_{x \to b} f(x) = L$

Recordemos que al calcular $\lim_{x\to b} f(x)$ no importa que la función f esté o no definida en b; lo que interesa es que f esté definida en las proximidades de mtb.

Consideremos la siguiente representación gráfica de una función f cualquiera para la que $f(b) = P$:

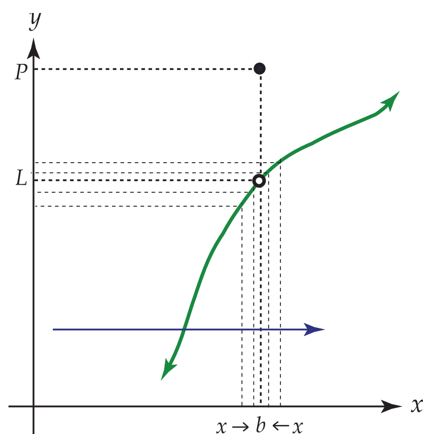


Figura 1.2 $\lim_{x\to b} f(x) = L,\ f(b) \neq L$

Observe que aunque $f(b) \neq L$, para valores de x próximos a b se tiene que $f(x) \to L$, por lo que puede escribirse siempre $\lim_{x\to b} f(x) = L$

Observe ahora la siguiente representación gráfica de una función f. En este caso, cuando x tiende a b por la

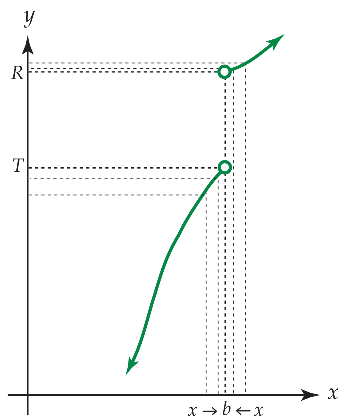


Figura 1.3 $\lim_{x\to b} f(x)$ no existe

derecha, que se escribe $x \to b^+$, la función tiende a R, pero cuando x tiende a b por la izquierda, (denotado $x \to b^-$) los valores de $f(x)$ tienden a T.

Así, la función f no tiende a un mismo valor cuando $x \to b$, por lo que se dice que no existe $\lim_{x\to b} f(x)$.

Consideremos ahora la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-c}$ con $c > 0$. Observe que cuando $x \to c^+$, entonces $f(x)$ tiende a tomar valores positivos cada vez mayores, (es decir, $f(x) \to +\infty$), y que cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma

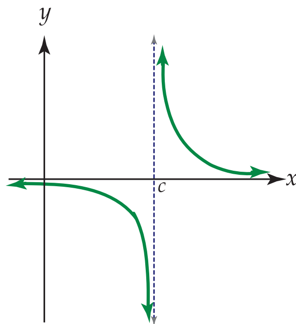


Figura 1.4 $f(x) = \dfrac{1}{x-c}$, con $c > 0$

valores negativos cada vez menores, ($f(x) \to -\infty$). Así, $f(x)$ no tiende a ningún número real fijo y se dice que $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

1.1.2 Formalización de la idea intuitiva de límite

En el ejemplo 1.1 se analizó el comportamiento de la función f con ecuación $f(x) = x^2 - 1$ en las proximidades de 2.

Expresamos como $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, el hecho de que para acercar los valores de la función tanto como se quisiera a 3, era suficiente acercar adecuadamente x al valor 2, $(x \neq 2)$.

De otra forma, puede decirse que $|f(x) - 3|$ es tan pequeño como se quiera, siempre que $|x - 2|$ sea suficientemente pequeño, aunque no igual a cero.

Utilizaremos las letras griegas ε (epsilon) y δ (delta) para escribir en forma más precisa lo anterior.

ε y δ son números reales positivos que indican qué tan pequeño queremos hacer el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y 3, y el valor absoluto de la diferencia entre x y 2 respectivamente.

Se dice entonces que $|f(x) - 3|$ será menor que ε, siempre que $|x - 2|$ sea menor que δ y $|x - 2| \neq 0$.

Luego, si para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 3| < \varepsilon$ si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces se dice que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

Observe que se establece la condición $0 < |x - 2|$, ya que únicamente nos interesa saber como es $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, no en 2 mismo, en cuyo caso $|x - 2|$ sería igual a cero.

Gráficamente tenemos:
Se tiene que, en el eje Y, los valores $f(x)$ están entre $3 - \varepsilon$ y $3 + \varepsilon$, siempre que los valores de x, en el eje de X, se localicen entre $2 - \delta$ y $2 + \delta$, o sea $|f(x) - 3| < \varepsilon$ si $0 < |x - 2| < \delta$.

En general, el valor de ε es escogido arbitrariamente, pero la elección de δ depende de la elección previa de ε. No se requiere que exista un número δ "apropiado" para todo ε, si no que, para cada ε existe un δ específico.

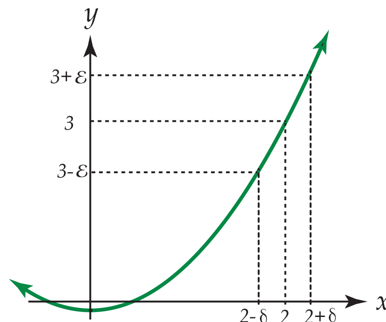


Figura 1.5 Gráfica de $f(x)$

Entre más pequeño sea el valor que se escoja de ε, más pequeño será el valor del correspondiente δ.

Luego, para el ejemplo 1.1, decimos que $\lim_{x\to 2} f(x)=3$, pues para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que $|f(x)-3|<\varepsilon$, siempre que $0<|x-2|<\delta$.

En general, para una función f cualquiera, el $\lim_{x\to b} f(x)=L$ significa que "la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee, haciendo simplemente que x esté suficientemente próximo a b, $(x\neq b)$".

1.1.3 Definición de límite

Definición 1.1

Sea f una función definida en una vecindad del punto $(b,0)$. Se dice que $\lim_{x\to b} f(x)=L$, si para cada número positivo ε, por pequeño que este sea, es posible determinar un número positivo δ, tal que para todos los valores de x, diferentes de b, que satisfacen la desigualdad $|x-b|<\delta$, se verificará la desigualdad $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Luego, $\lim_{x\to b} f(x)=L$ si y sólo si para cada $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, si $0<|x-b|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

En forma gráfica se tiene:
También el $\lim_{x\to b} f(x)=L$ puede interpretarse de la forma siguiente: como de la desigualdad $|x-b|<\delta$ se deduce

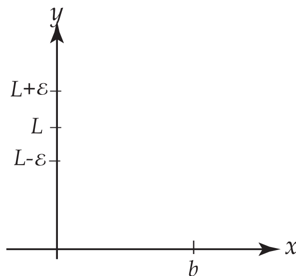


Figura 1.6 Para cada $\varepsilon>0$,

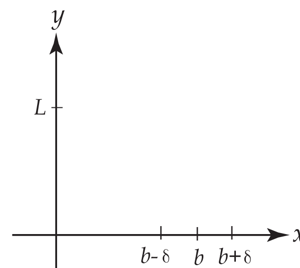


Figura 1.7 existe $\delta>0$

que $|f(x)-L|<\varepsilon$, entonces todos los puntos en la gráfica de la función con ecuación $y=f(x)$, que corresponden a los puntos x que se localizan a una distancia no mayor que δ del punto b, se encontrarán dentro de una franja

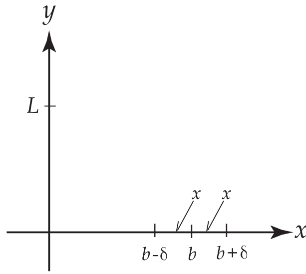


Figura 1.8 tal que, si $0 < |x - b| < \delta$,

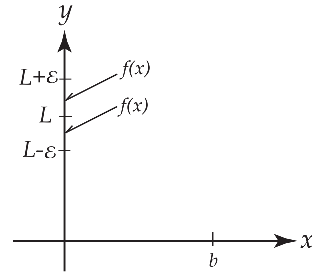


Figura 1.9 entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

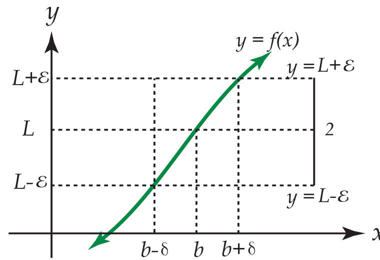


Figura 1.10 Gráfica de $f(x)$

de ancho 2ε, limitada por las rectas $y = L - \varepsilon$, $y = L + \varepsilon$, como se muestra en la siguiente figura: Puede decirse entonces que la definición de límite dada anteriormente , establece que los valores de la función f se aproximan a un límite L, conforme x se aproxima a un número b, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando x suficientemente cercana a "b", pero no igual a "b".

Daremos ahora algunos ejemplos en los que se utiliza la definición de límite:

Ejemplo 1.4

Probar que $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$

Solución: Debe probarse que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$.

Vamos a establecer una relación entre $|(2x - 1) - 3|$ y $|x - 2|$.

Como $|(2x - 1) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2x - 4| = |2(x - 2)| = |2||x - 2|$ o sea
$|(2x - 1) - 3| = 2|x - 2|$.

Entonces, para hacer $|(2x - 1) - 3|$ menor que ε, es suficiente que $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que puede tomarse $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $(\delta = \frac{\varepsilon}{2})$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$.

Ejemplo 1.5

Probar que $\lim_{x \to 3} (4x-1) = 11$

Solución: Dada $\varepsilon > 0$, debe encontrarse $\delta > 0$ tal que $|(4x-1)-11| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.
Como $|(4x-1)-11| = |4x-1-11| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3|$ entonces para que $|(4x-1)-11|$ sea menor que ε es suficiente que $|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$ por lo que podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{4}\right)$ tal que $|(4x-1)-11| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Ejemplo 1.6

Probar que $\lim_{x \to 1} (x^2+2x) = 3$

Solución: Debe encontrarse δ en términos de ε, $(\varepsilon > 0$ dada$)$, tal que $|x^2+2x-3|$ sea menor que ϵ cuando $0 < |x-1| < \delta$. Se tiene que $x^2+2x-3 = |(x-1)(x+3)| = |x-1| \cdot |x+3|$

Como lo que nos interesa es el límite cuando x tiende a 1, vamos a considerar los valores de x que estén cerca de 1, pero que sean diferentes de 1.

Así, tomamos $|x-1| < 1$ de donde $-1 < x-1 < 1$ y por tanto $0 < x < 2$.

Vamos a determinar un número r para el que $|x+3| < r$ cuando $|x-1| < 1$.

De la desigualdad $0 < x < 2$ se obtiene que $3 < x+3 < 5$ por lo que $|x+3| < 5$ y puede tomarse $r = 5$.

Luego $|x-1| \cdot |x-3| < 5 \cdot |x-1|$ cuando $|x-1| < 1$

Además $5|x-1|$ es menor que ε si $|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$

Por tanto, si se toma δ como el menor de los números 1 y $\frac{\varepsilon}{5}$ entonces
$|x^2+2x-3| < \varepsilon$ cuando $0 < |x-1| < \delta$

Por ejemplo, si se toma $\varepsilon = 1$ entonces $\delta = \frac{1}{5}$ y
$|x^2+2x-3| = |x-1| \cdot |x+3| < 5|x-1| < 1$ cuando $0 < |x-1| < \frac{1}{5}$

En general, determinar el $\lim_{x \to b} f(x)$ mediante el uso directo de la definición es difícil, por lo que para hacerlo se contará con la ayuda de una serie de teoremas, que estudiaremos más adelante.

Hemos dado un vistazo intuitivo y otro más formal sobre la noción de límite en un punto. En síntesis, lo que nos interesa saber es el comportamiento de una función cuando la variable independiente tiende a un determinado

valor en el eje X.

Ejemplo 1.7

Determinar los siguientes límites, utilizando para ello la representación gráfica de la función f que se da a continuación:

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$

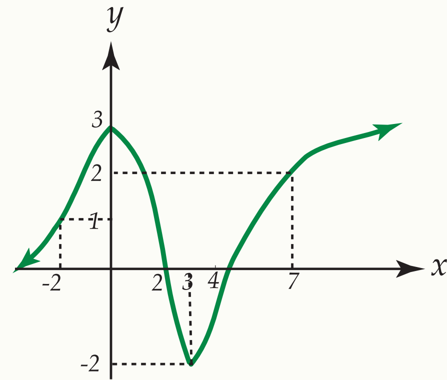
b. $\lim_{x\to 2} f(x)$

c. $\lim_{x\to 3} f(x)$

d. $\lim_{x\to 4.5} f(x)$

e. $\lim_{x\to -2} f(x)$

f. $\lim_{x\to 7} f(x)$



Solución:

A partir de la gráfica de f se tiene que:
$\lim_{x\to 0} f(x)=3,\ \lim_{x\to 2} f(x)=0,\ \lim_{x\to 3} f(x)=-2,\ \lim_{x\to 4.5} f(x)=0,\ \lim_{x\to -2} f(x)=1,\ \lim_{x\to 7} f(x)=2$

EJERCICIOS

1.1 Determinar los siguientes límites, utilizando para ello la representación gráfica de la función g, que se da a continuación:

a) $\lim_{x\to -3} g(x)$

b) $\lim_{x\to 0} g(x)$

c) $\lim_{x\to 2} g(x)$

d) $\lim_{x\to -2} g(x)$

e) $\lim_{x\to 4} g(x)$

f) $\lim_{x\to -1} g(x)$

g) $\lim_{x\to 1} g(x)$

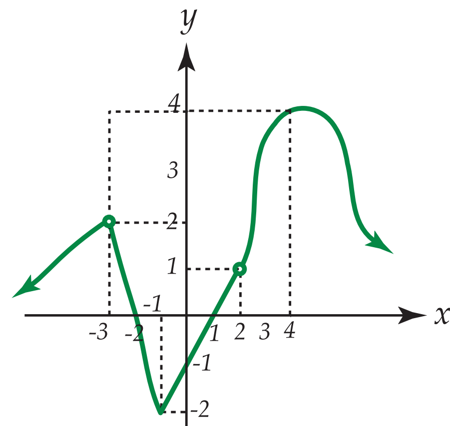


Figura 1.11 Gráfica de $g(x)$

1.1.4 Límites laterales

Hasta el momento hemos visto límites de funciones cuyo trazo es continuo, sin cortes o saltos bruscos. Sin embargo, existen algunas funciones que presentan algunas discontinuidades, llamadas funciones discontinuas y que estudiaremos en el tema continuidad de funciones. Nos dedicaremos ahora a estudiar los límites en este tipo de funciones.

Consideremos la siguiente representación gráfica de una función f, en la que existe una discontinuidad cuando $x = a$:

Notemos que cuando x tiende hacia "a" por la derecha de "a" la función tiende a 2, pero cuando x tiende hacia

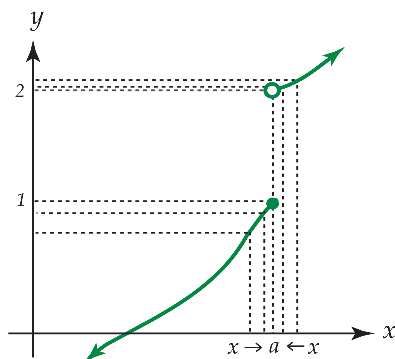


Figura 1.12 f es discontinua en a

"a" por la izquierda de "a", la función tiende hacia 1.

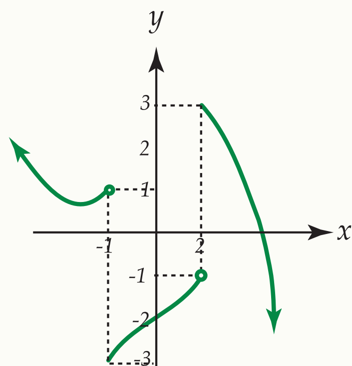
Escribimos $x \to a^+$ para indicar que x tiende hacia "a" por la derecha, es decir, tomando valores mayores que "a".

Similarmente $x \to a^-$ indica que x tiende hacia "a" por la izquierda, o sea, tomando valores menores que "a".

Utilizando ahora la notación de límites, escribimos $\lim_{x\to a^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = 1$. Estos límites reciben el nombre de límites laterales; el límite por la derecha es 2 y el límite por la izquierda es 1.

Ejemplo 1.8

Determinaremos los límites en los puntos de discontinuidad de la función h cuya representación gráfica es la siguiente:



Se tiene que:

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 3$ y
$\lim_{x\to 2^-} h(x) = -1$

$\lim_{x\to -1^+} h(x) = -3$ y
$\lim_{x\to -1^-} h(x) = 1$

1.1.5 Definición de límites laterales o unilaterales

Definición 1.2 Definición de límite por la derecha

Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon \cdot L$ es el límite por la derecha de $f(x)$ en "a".

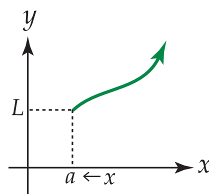


Figura 1.13 $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Observe que no hay barras de valor absoluto alrededor de $x - a$, pues $x - a$ es mayor que cero ya que $x > a$.

Definición 1.3 Definición de límite por la izquierda

Se dice que $\lim_{x \to a^-} f(x) = R$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $|f(x) - R| < \varepsilon$. R es el límite por la izquierda de $f(x)$ en "a".

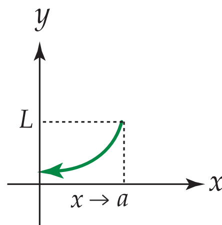


Figura 1.14 $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Note que la expresión $a - x$ es mayor que cero, pues $x \to a^-$ por lo que $x < a$.

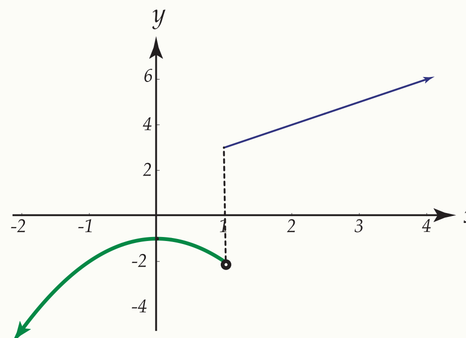
En adelante, determinaremos los límites laterales a partir de la representación gráfica de una función cuya ecuación es dada.

Ejemplo 1.9

Determinar los límites, en los puntos de discontinuidad, de la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Solución: Primero hagamos la gráfica de la función.



El punto de discontinuidad se presenta cuando $x = 1$.
Luego: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$
Observe que el límite por la derecha (3), es diferente al límite por la izquierda (2).

EJERCICIOS

1.2 Represente la función h definida por $h(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

y determine los límites laterales en el punto de discontinuidad.

Es posible demostrar que para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es necesario y suficiente que los límites laterales existan y sean iguales.

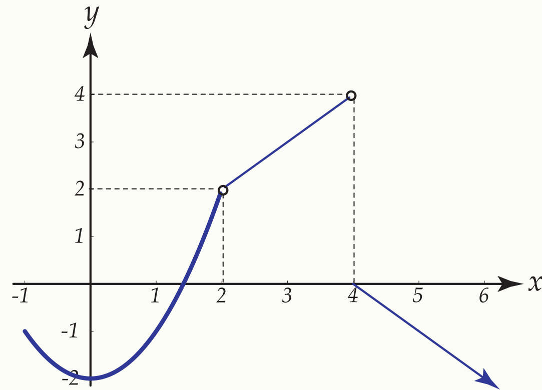
Es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

Por consiguiente, si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ es diferente de $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

Ejemplo 1.10

Representemos gráficamente la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 4-x & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$

Ejemplo 1.10 (continuación).



Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$, entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

Como $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 4$, entonces $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe.

EJERCICIOS

1.3 Considere la representación gráfica de la función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x+3 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Determine si existen cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to -2} g(x)$

b) $\lim_{x\to 1} g(x)$

c) $\lim_{x\to 3} g(x)$

d) $\lim_{x\to 4} g(x)$

e) $\lim_{x\to 0} g(x)$

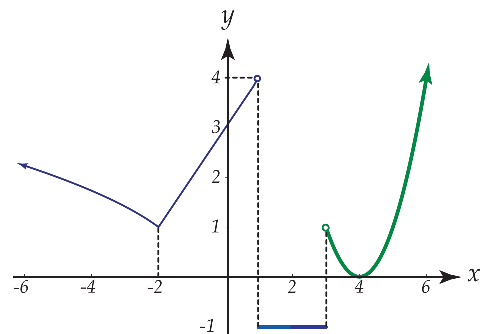


Figura 1.15 Gráfica de $g(x)$

1.1.6 Teoremas fundamentales sobre límites

En los apartados anteriores hemos determinado el límite de una función en un punto, utilizando para ello la representación gráfica de la función. Sin embargo, se hace necesario poseer otros criterios que permitan agilizar el proceso. Con este fin es que estudiaremos algunos teoremas básicos para determinar el límite de una función en un punto.

Teorema 1.1 Sobre la unicidad del límite

Sea f una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $a \in I$.Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$ entonces $L = M$.

O sea, el valor del límite de una función en un punto es único.

Teorema 1.2

Si m y b son números reales entonces $\lim\limits_{x\to a}(mx+b) = ma+b$

Ejemplo 1.11

Aplicación del teorema.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5) = 3\cdot 2+5 = 11$
2. $\lim\limits_{x\to 3}(-4x+2) = -4\cdot 3+2 = -10$

EJERCICIOS

1.4 Determine cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3}(5x-2)$

b) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}x+1\right)$

Como consecuencia del teorema 1.2 se tiene que:

a. $\lim\limits_{x\to a} x = a$, con $m=1$, $b=0$ en $f(x) = mx+b$

b. $\lim\limits_{x\to a} b = b$, con $m=0$ en $f(x) = mx+b$

Ejemplo 1.12

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x\to 5} x = 5$
2. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}$
3. $\lim_{x\to \sqrt{2}} x = \sqrt{2}$
4. $\lim_{x\to \frac{-1}{5}} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Teorema 1.3

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y k es un número real entonces se cumple que

$$\lim_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot L$$

Ejemplo 1.13

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x\to 2} 3(2x+5) = 3 \lim_{x\to 2} (2x+5) = 3(2\cdot 2+5) = 27$
2. $\lim_{x\to -1} \frac{1}{5}(3x) = \lim_{x\to -1} \frac{3}{5}(x) = \frac{3}{5} \lim_{x\to -1} (x) = \frac{3}{5}(-1) = \frac{-3}{5}$

EJERCICIOS

1.5 Determine cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{5}{4}(2x-1)$

b) $\lim_{x\to r} 3\left(3x + \frac{1}{5}\right)$

Teorema 1.4

Si $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ entonces $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, con $a \geq 0$.

Ejemplo 1.14

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x \to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$

2. $\lim_{y \to \frac{1}{2}} 3\sqrt{y} = 3 \lim_{y \to \frac{1}{2}} \sqrt{y} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

EJERCICIOS

1.6 Determine los límites indicados:

a) $\lim_{x \to 4} 4\sqrt{x}$

b) $\lim_{x \to 2} 5\sqrt{x}$

Teorema 1.5

Si f y g son dos funciones para las que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ entonces se cumple que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(x) = L + M$$

Este teorema lo que nos dice es que el límite de la suma de dos funciones, es igual a la suma de los límites de cada una de las funciones.

Ejemplo 1.15

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x \to 3} (2x + \sqrt{x}) = \lim_{x \to 3} 2x + \lim_{x \to 3} \sqrt{x} = 2 \cdot 3 + \sqrt{3} = 6 + \sqrt{3}$

2. $\lim_{x \to 2} (5 + 3\sqrt{x}) = \lim_{x \to 2} 5 + \lim_{x \to 2} 3\sqrt{x} = 5 + 3\sqrt{2}$

EJERCICIOS

1.7 Determine los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 5} (5\sqrt{x} + 2)$

b) $\lim_{x \to \frac{5}{3}} (2x + 7)$

El teorema 1.5 puede extenderse a un número cualquiera finito de funciones.

Teorema 1.6

Si f y g son dos funciones para las que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ entonces se cumple que $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

Es decir, el límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de cada una de las funciones.

Ejemplo 1.16

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x\to 2} x\sqrt{x} = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} \sqrt{x} = 2\sqrt{2}$
2. $\lim_{x\to -1} x^2 = \lim_{x\to -1} x \cdot x = \lim_{x\to -1} x \cdot \lim_{x\to -1} x = (-1) \cdot (-1) = 1$
3. $\lim_{x\to 2} 2\sqrt{x}(5x+2) = \lim_{x\to 2} 2\sqrt{x} \cdot \lim_{x\to 2} (5x+2) = 2\sqrt{2} \cdot (5 \cdot 2 + 2) = 24\sqrt{2}$

EJERCICIOS

1.8 Determine el valor de cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 4} x^2\sqrt{x}$

b) $\lim_{x\to 5} x^3$

El teorema 1.6 puede extenderse a un número cualquiera finito de funciones.

Corolario 1.1 *Si* $f(x) = x^n$ *entonces* $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, *con* $n \in \mathbb{N}$.

Observe que $x^n = x \cdot x \cdot x ... x$ (n factores) por lo que aplicando el teorema 1.6 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} x^n &= \lim_{x\to a} [x \cdot x \cdot x ... x] \\
&= \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} (x \cdot x \cdot x ... x) \\
&= \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} (x \cdot x \cdot x ... x) \\
&= \underbrace{... \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x ... \lim_{x\to a} x}_{\text{n factores}} \\
&= a \cdot a \cdot a ... a \ \text{(n factores)} \\
&= a^n
\end{aligned}$$

En particular, el límite de la enésima potencia de $f(x)$ es igual a la enésima potencia del límite de $f(x)$. Es decir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$.

Ejemplo 1.17

Aplicación del corolario.

1. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} x^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
2. $\lim\limits_{x\to -1} 2x^8 = 2\lim\limits_{x\to -1} 2x^8 = 2(-1)^8 = 2$
3. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)^6 = \left[\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)\right]^6 = [3\cdot 2+5]^6 = 11^6$
4. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x)^5 = \left[\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x)\right]^5 = [(-1)^2+3(-1)]^5 = (-2)^5 = -32$

Teorema 1.7

Si f y g son dos funciones para las cuales $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ entonces se tiene que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ siempre que } M \neq 0$$

Teorema 1.8

$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ siempre que $a \neq 0$

Ejemplo 1.18

Aplicación del teorema.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$
2. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4}{x} = \lim\limits_{x\to -3} 4\cdot\frac{1}{x} = 4\lim\limits_{x\to -3}\frac{1}{x} = 4\cdot\frac{1}{-3} = \frac{-4}{3}$

Ejemplo 1.18 (continuación).

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 2x+1}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}} = \frac{2\cdot 2+1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ (Por los teoremas 1.2 y 1.4)}$$

4. $$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{\lim\limits_{x\to -3} 2x^2+3}{\lim\limits_{x\to -3} x^3-1} \text{ (Por teorema 1.7)}$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{\lim\limits_{x\to -3} 2x^2+\lim\limits_{x\to -3} 3}{\lim\limits_{x\to -3} x^3-\lim\limits_{x\to -3} 1} \text{ (Por teorema 1.3)}$$

$$= \frac{2(-3)^2+3}{(-3)^3-4} \text{ (Por teorema 1.3 y corolario del teorema 1.6)}$$

$$= \frac{-21}{28} = \frac{-3}{4}$$

5. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}+x-2}{x^2-3x+1} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{(3)^2-3(3)+1} = \sqrt{3}+1$$

Observe que en este ejemplo se han aplicado directamente los teoremas estudiados, sin hacer el desglose paso por paso como en el ejemplo anterior.

EJERCICIOS

1.9 Determine el valor de cada uno de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{2x+3}{x^2-5x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}+4x-5}{3x^3-5}$

Teorema 1.9

Si $n\in\mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ si:

i. a es cualquier número positivo.

ii. $a\leq 0$ y n es impar.

Ejemplo 1.19

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5}$
2. $\lim_{x \to 2} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{2}$
3. $\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8} = -2$
4. $\lim_{x \to 64} \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{64} = 2$

Teorema 1.10

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

i. $L \geq 0$ y n es cualquier entero positivo ($n \in \mathbb{R}$).

ii. $L \leq 0$ y n es un entero impar positivo.

Ejemplo 1.20

Aplicación del teorema.

1. $\lim_{x \to 3} \sqrt{5x+3} = \sqrt{\lim_{x \to 3} 5x+3} = \sqrt{18}$
2. $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{2x^2+3} = \sqrt[3]{\lim_{x \to -1} 2x^2+3} = \sqrt[3]{2(-1)^2+3} = \sqrt[3]{5}$
3. $\lim_{x \to -2} \sqrt[5]{6x+2} = \sqrt[5]{\lim_{x \to -2} 6x+2} = \sqrt[5]{-28} = -\sqrt[5]{28}$

EJERCICIOS

1.10 Determine el valor de cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 4} \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{2}}$

b) $\lim_{x \to -5} \sqrt[6]{5x^2 + \frac{5}{x} + 4}$

Teorema 1.11

Si f, g y h son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x de cierto entorno reducido δ_1 de b y además $\lim_{x \to b} f(x) = L = \lim_{x \to b} h(x)$ entonces se cumple que $\lim_{x \to b} g(x) = L$

El teorema 1.11 nos dice que, si para x próximo a b, la función g está comprendida entre dos funciones que tienden a un mismo límite L, entonces $g(x)$ también tiende a L.

Gráficamente podemos tener lo siguiente:

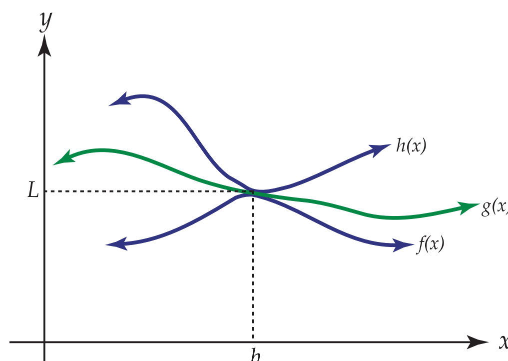


Figura 1.16 $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} h(x) = L$

Ejemplo 1.21

Si g es una función tal que $-x^2 \leq g(x) \leq x^2$ para $x \neq 0$ y como $\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$ y $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ entonces se tiene que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Sea ahora g una función tal que $5 + x \leq g(x) \leq x^2 - 9x + 30$ para $x \neq 5$

Se tiene que $\lim_{x \to 5} (5 + x) = 10$ y $\lim_{x \to 5} (x^2 - 9x + 30) = 10$

Luego $\lim_{x \to 5} g(x) = 10$

EJERCICIOS

1.11 Sea f una función tal que $-(x-2)^2 \leq f(x) \leq 0$ para $x \neq 2$.Calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$

1.1.7 Otros aspectos sobre límites

En algunos límites no es posible aplicar directamente los teoremas sobre límites, especialmente el del límite de un cociente de funciones, ya que se presenta la forma indeterminada "$\frac{0}{0}$". En estos casos se hace necesario realizar primero algún proceso algebraico, para luego determinar el valor del límite. Es indispensable en esta parte tener muy en claro los conceptos sobre factorización, racionalización y valor absoluto.

Por medio de ejemplos estudiaremos:

Límites que involucran factorizaciones

Ejemplo 1.22

Calcular $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+2x-12}{3x^2-5x-2}$

Solución: Si evaluamos el numerador se obtiene: $2(2)^2+2(2)-12=0$ y en el denominador: $3(2)^2-5(2)-2=0$

Luego se tiene la expresión "$\frac{0}{0}$" que no tiene sentido.

Como 2 hace cero ambos polinomios podemos hacer una factorización como sigue:

$2x^2+2x-12=(x-2)(2x+6)$, $3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$. Luego el límite dado puede escribirse como:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x+6)}{(x-2)(3x+1)},$$

y simplificando se obtiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+6}{3x+1}$$

que sí puede determinarse pues

$$\lim_{x\to 2} 3x+1$$

es diferente de cero.

Luego: $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+2x-12}{3x^2-5x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+6}{3x+1} = \frac{10}{7}$

Ejemplo 1.23

Calcular $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+(1-a)x^2-ax}{x^2-x-2}$

Solución: Evaluando nuevamente numerador y denominador se obtiene:

Ejemplo 1.23 (continuación).

$(-1)^3 + (1-a)(-1)^2 - a(-1) = -1 + 1 - a + a = 0$
$(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0.$

Puede escribirse el límite anterior ya factorizados los polinomios como:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x(x-a)(x+1)}{(x-2)(x+1)} &= \lim_{x\to -1} \frac{x(x-a)}{x-2} && \text{Simplificando la expresión anterior.} \\
&= \frac{-1(-1-a)}{-1-2} \\
&= -\frac{a+1}{3} && \text{Aplicando el teorema 1.7.}
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1.12 Determinar: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{3x-x^2}$ (Respuesta: -9)

Límites que involucran racionalizaciones

Ejemplo 1.24

Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$

Solución: Como al evaluar el numerador y el denominador se obtiene cero en ambos, procedemos a racionalizar el denominador de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{-(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\left[-(x+2)(\sqrt{2}+\sqrt{x})\right]
\end{aligned}$$

en este último límite no hay ningún problema y aplicando los teoremas respectivos se obtiene como resultado $-8\sqrt{2}$.

Ejemplo 1.25

Calcule $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x}-3}{x-3}$. Recuerde que $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Solución: Como vuelve a presentarse la forma "$\dfrac{0}{0}$", procedemos a racionalizar como sigue:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x^2+6x}-3}{x-3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+3\sqrt[3]{x^2+6x}+3^2}{\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+3\sqrt[3]{x^2+6x}+3^2} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt[3]{x^2+6x})^3-3^3}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+3\sqrt[3]{x^2+6x}+9\right]} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+9)}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+3\sqrt[3]{x^2+6x}+9\right]} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+9}{\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+3\sqrt[3]{x^2+6x}+9} = \frac{4}{9}$$

EJERCICIOS

1.13 Determinar $\lim_{x\to -1} \dfrac{4-\sqrt{15-x}}{x^2}$ (Respuesta: 0)

Límites con valor absoluto

Recuerde que $|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{si} \quad x \geq a \\ -(x-a) & \text{si} \quad x \leq a \end{cases}$

Ejemplo 1.26

Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$

Solución: Como $|2-2| = |0| = 0$ y $2^2-4=0$ vuelve a obtenerse la forma "$\dfrac{0}{0}$". Como aparece $|x-2|$ de acuerdo a la definición de valor absoluto se tiene que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

Así, para valores de x mayores que 2 la expresión $|x-2|$ se puede sustituir por $x-2$, y para valores de x mayores que 2 se sustituye por $-(x-2)$, por lo que se hace necesario calcular los límites cuando $x\to 2^+$ y cuando $x\to 2^-$, es decir, se deben calcular los límites laterales.

Luego:

Ejemplo 1.26 (continuación).

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

Como los límites laterales son diferentes entonces el $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$ no existe.

Ejemplo 1.27

Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{2-|1-x|}$

Solución: Vuelve a presentarse la forma "$\frac{0}{0}$". Analizando el valor absoluto se obtiene que:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -(1-x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como se desea averiguar el límite cuando $x \to 3$ y 3 es mayor que 1, entonces se analiza únicamente el siguiente límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{2-|1-x|} &= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{2-[-(1-x)]} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{2+1-x} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{3-x} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{-(x-3)} \\
&= \lim_{x\to 3} -2 \\
&= -2
\end{aligned}$$

En este caso el límite sí existe.

EJERCICIOS

1.14 Determinar el $\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|}{2x^2+3x+1}$ (Respuesta: no existe)

Límites que involucran un cambio de variable

Ejemplo 1.28

Calcular $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}}$

Solución: Al evaluar numerador y denominador en $y=0$ se obtiene "$\frac{0}{0}$". Aunque en este caso podría efectuarse una racionalización, el procedimiento sería muy largo pues hay que racionalizar tanto el numerador como el denominador. Por tanto, vamos a hacer un cambio de variable en la forma siguiente:

Se desea sustituir la expresión $1+y$ por otra que tenga tanto raíz cúbica como raíz cuadrada. Luego, sea $1+y=u^6$ (observe que $\sqrt[6]{u}=c^3$ y $\sqrt[3]{u^6}=u^2$).

Además cuando $y\to 0$ se tiene que $u^6\to 1$ y por tanto $u\to \sqrt[6]{1}$, es decir, $u\to 1$; en el límite original se sustituye $y\to 0$ por $u\to 1$

Sustituyendo se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}} &= \lim_{u\to 1} \frac{\sqrt[3]{u^6}-1}{1-\sqrt{u^6}} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{u^2-1}{1-u^3}
\end{aligned}$$

Aunque vuelve a presentarse la forma "$\frac{0}{0}$", la expresión ahora es fácilmente factorizable.

Así:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 1} \frac{u^2-1}{1-u^3} &= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(u+1)}{(1-u)(1+u+u^2)} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{-(1-u)(u+1)}{(1-u)(1+u+u^2)} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{-(u+1)}{(1+u+u^2)} \\
&= \frac{-2}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.29

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{1-x}$

Solución: Nuevamente, evaluando el numerador y el denominador en 1 se obtiene "$\dfrac{0}{0}$"

En este caso vamos a sustituir $3-2x$ por una expresión que posea raíz quinta. Tomamos entonces $3-2x = u^5$ pues $\sqrt[5]{u^5} = u$.

Cuando x tiende a 1 se tiene que $3-2x$ también tiende a 1 y por tanto $u^5 \to 1$ y $u \to \sqrt[5]{1}$ de donde $u \to 1$.

Sustituyendo se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{1-x} &= \lim_{u\to 1} \frac{\sqrt[5]{u^5}-1}{1-\frac{3-u^5}{2}} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{\frac{2-3+u^5}{2}} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{2(u-1)}{u^5-1} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{2(u-1)}{(u-1)(u^4+u^3+u^2+u+1)} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{2}{u^4+u^3+u^2+u+1} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1.15 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt[4]{x-1}}{1+\sqrt[3]{1-x}}$ $\left(\text{Respuesta: } \dfrac{3}{4}\right)$

1.1.8 Límites que involucran funciones trigonométricas

Estudiaremos aquí los límites de las funciones seno y coseno, y algunos límites especiales que no pueden resolverse por los procedimientos ya estudiados.

Teorema 1.12

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{sen}\alpha = 0$ y $\lim\limits_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1$ donde α es un ángulo que se mide en radianes.

Recordemos que la medida en radianes de un ángulo se define por la igualdad siguiente: $\theta = \dfrac{s}{r}$, donde s el la longitud del arco interceptado por el ángulo, sobre una circunferencia de radio r, cuyo centro coincide con el vértice del ángulo, como se muestra en la siguiente figura:

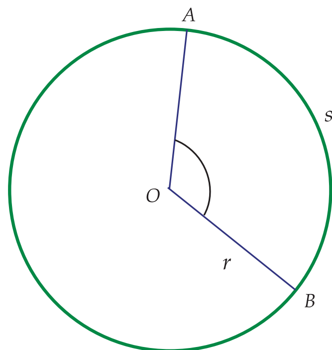


Figura 1.17 Circunferencia de radio r

s es la medida del arco AB
r es el radio del círculo

Consideramos ahora un círculo de radio uno y un ángulo agudo AOP cuya medida en radianes es α:
En este caso como $r = 1$ se tiene que $\alpha = \frac{s}{1}$ por lo que $\alpha = s$.

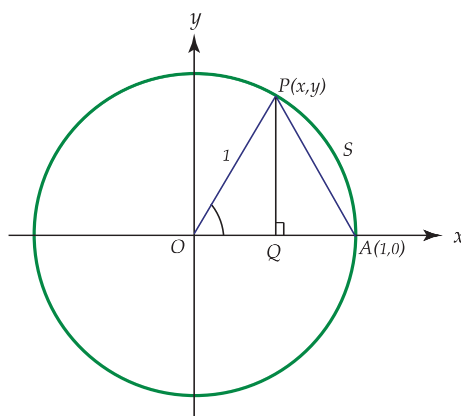


Figura 1.18 Circunferencia de radio 1

El triángulo PQA es rectángulo y sus catetos PQ y QA miden respectivamente $\operatorname{sen}\alpha$ y $1 - \cos\alpha$ (Note que $OQ = \cos\alpha$).

Por el teorema de pitágoras se obtiene que:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)^2 < (PA)^2$$

Como la longitud de PA es menor que la longitud del arco AP, es decir, es menor que α, se tiene que:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)^2 < \alpha^2$$

Como los dos sumandos del primer miembro de la desigualdad anterior son positivos, entonces cada uno de ellos es menor que la suma de ambos, por lo que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha < (AP)^2 \text{ y } (1 - \cos\alpha)^2 < (PA)^2$$

Y como $(AP)^2 < \alpha^2$ entonces:

$$\operatorname{sen}^2\alpha < \alpha^2 \text{ y } (1 - \cos\alpha)^2 < \alpha^2$$

De donde $|\operatorname{sen}\alpha| < |\alpha|$ y $|1-\cos\alpha| < |\alpha|$

Si ε es un número positivo, podemos tomar $\delta = \varepsilon$ de tal forma que $|\operatorname{sen}\alpha| < |\alpha| < \varepsilon$ y $|1-\cos\alpha| < |\alpha| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\alpha| < \delta$.

De otra manera: $|\operatorname{sen}\alpha - 0| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\alpha - 0| < \delta$ por lo que $\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{sen}\alpha = 0$, y similarmente, $|\cos\alpha - 1| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\alpha - 0| < \delta$ por lo que $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$

De esta forma hemos probado los dos límites.

Teorema 1.13

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$$

Observe que este límite no puede resolverse por los procedimientos ya estudiados de factorización, racionalización o cambio de variable, y que al evaluar directamente se obtiene la forma "$\frac{0}{0}$".

Consideremos nuevamente un círculo unitario y designemos por x el ángulo central MOB (siendo en radianes su medida), con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, como se muestra en la figura siguiente:
Puede observarse que: el área del $\triangle MOA$ es menor que el área del sector MOA es menor que el área del $\triangle COA$ (1).

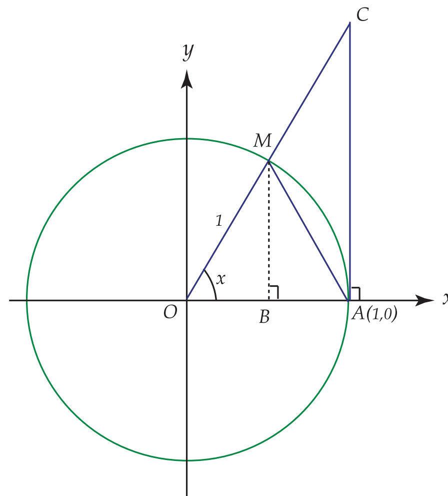


Figura 1.19 Circunferencia de radio 1

Además se tiene que: el área del $\triangle MOA = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\cdot\overline{MB} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{sen}x = \frac{\operatorname{sen}x}{2}$.

El área del sector $MOA = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\ \angle AOM = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{x}{2}$

El área del $\triangle COA = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\ \overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \quad \text{de donde} \quad \operatorname{sen} x < x < \tan x$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ entonces $\operatorname{sen} x > 0$, por lo que podemos dividir los términos de la desigualdad anterior por $\operatorname{sen} x$, sin alternar el sentido de la desigualdad, obteniendo entonces que:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{por lo que} \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Esta última desigualdad también es válida cuando $\frac{\pi}{2} < x < 0$ pues $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y además $\cos(-x) = \cos x$

Como $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ y $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ y $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, aplicando el teorema 1.11 se concluye que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Ejemplo 1.30

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{6x} = 1$$

Ejemplo 1.31

Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

Solución: Observe que en este caso el argumento es $3x$, por lo que en el denominador se necesita también la expresión $3x$, de ahí que se lleve a cabo el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} &= \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \\
&= 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \\
&= 3 \cdot 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.32

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} = 1 \quad \text{pues } (x-1) \to 0 \text{ cuando } x \to 1$$

Ejemplo 1.33

Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{(3x-6)}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(3x-6)} &= \lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{3(x-2)} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} \\
&= \tfrac{1}{3} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.34

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1.16 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$ (Respuesta: $-\frac{1}{9}$)

1.17 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ (Respuesta: -2)

En los siguientes ejemplos utilizaremos un procedimiento común en algunos límites trigonométricos y que consiste en multiplicar por el conjugado de una expresión.

Ejemplo 1.35

Calcular $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y}$

Solución: Multiplicamos por el conjugado de $1-\cos y$ que es $1+\cos y$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} &= \lim_{y\to 0} \left(\frac{1-\cos y}{y} \cdot \frac{1+\cos y}{1+\cos y}\right) \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos^2 y}{y(1+\cos y)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y(1+\cos y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{1+\cos y} \\
&= 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.36

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^3 \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)}{x^3 \cos x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3 \cos x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = 1^3 \cdot \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.37

Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$

Solución: Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ entonces $1-2\cos x \to 0$ cuando $x \to \frac{\pi}{3}$.

Además $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \to 0$ cuando $x \to \frac{\pi}{3}$

Desarrollemos $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen} x\,\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\,\cos x \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x}{2}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x}{2(1-2\cos x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x}{2(1-2\cos x)} \cdot \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x}{\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x}{2(1-2\cos x)(\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2(\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\,\cos x)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x - 3\cos^2 x}{1-2\cos x} \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\right)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-4\cos^2 x}{1-2\cos x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(1-2\cos x)(1+2\cos x)}{1-2\cos x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} 1+2\cos x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1.18 $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sec 2\theta\ \tan 3\theta}{5\theta}$

1.19 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

1.1.9 Límites infinitos y límites al infinito

El símbolo ∞ se lee infinito, es de carácter posicional, no representa ningún número real.

Si una variable independiente x está creciendo indefinidamente a través de valores positivos, se escribe $x \to +\infty$ (que se lee: x tiende a más infinito), y si decrece a través de valores negativos, se denota como $x \to -\infty$ (que se lee: x tiende a menos infinito).

Similarmente, cuando $f(x)$ crece indefinidamente y toma valores positivos cada vez mayores, se escribe $f(x) \to +\infty$, y si decrece tomando valores negativos escribimos $f(x) \to -\infty$.

Consideramos la función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Vamos a determinar el comportamiento de la función cuando $x \to 2$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Para ello nos ayudamos de las tablas siguientes:
En este caso, cuando $x \to 2^+$, o sea, $(x \to 2,\ x > 2)$, la función $f(x)$ tiende a tomar valores positivos cada vez

x	3	2,5	2,3	2,25	2,1	2,01	2,001	2,00001
$\dfrac{1}{x-2}$	1	2	3,33	4	10	100	1000	10000

Figura 1.20

mayores. Esto podemos escribirlo como $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 2^+$, es decir $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
Ahora, cuando x toma valores cercanos a 2 pero menores que 2, la función tiende a valores negativos cada vez

x	1	1,5	1,6	1,75	1,9	1,99	1,999	1,9999
$\dfrac{1}{x-2}$	-1	-2	-2,5	-4	-10	-100	-1000	-10000

Figura 1.21

menores. Es decir, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$, o sea $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.
Ahora observe que es x la que tiende a tomar valores positivos cada vez mayores, obteniendo como resultado que

x	4	5	8	10	100	1000
$\dfrac{1}{x-2}$	0,5	0,33	0,16	0,125	0,0125	0,001002

Figura 1.22

$f(x)$ tiende a valores cercanos a cero.

Así $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$, o sea, $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.
En forma similar a la tabla anterior se tiene que $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ es decir, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Podemos representar gráficamente el comportamiento de la función f en la forma siguiente:

x	-3	-5	-8	-10	-100	-1000
$\frac{1}{x-2}$	-0,2	-0,142	-0,1	-0,083	-0,0098	0,000998

Figura 1.23

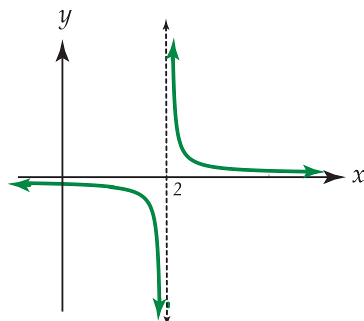


Figura 1.24 $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Consideramos ahora la función f definida por $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, cuya representación gráfica es la siguiente:

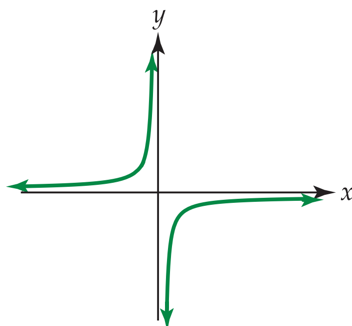


Figura 1.25 $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Podemos decir que:

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Daremos ahora algunas definiciones sobre límites infinitos y límites al infinito.

EJERCICIOS

1.20 Determine

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

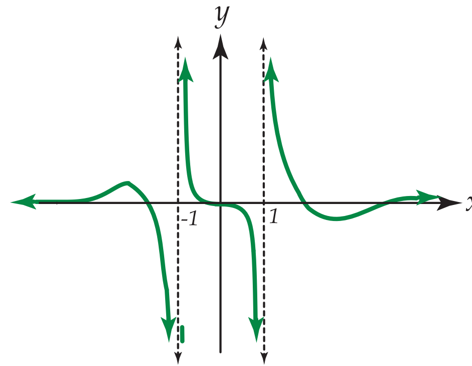


Figura 1.26 Gráfica de $g(x)$

Definición 1.4

Se dice que $f(x)$ crece sin límite cuando x tiende a c, que se denota $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, si para todo número real $N > 0$, (sin importar su magnitud), existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Gráficamente se tiene:

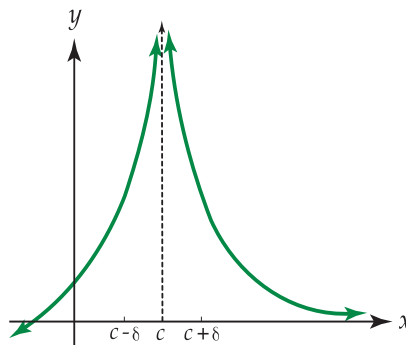


Figura 1.27 Gráfica de $f(x)$

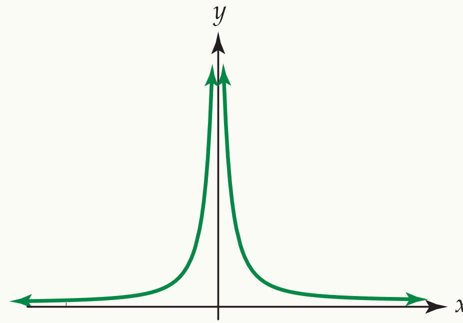
Esta definición nos dice que es posible hacer $f(x)$ tan grande como se quiera, (es decir, mayor que cualquier número positivo N), tomando x suficientemente cerca de c.

Ejemplo 1.38

Consideremos la representación gráfica de la función f definida por:

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Demostremos ahora que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$



Para hacer la prueba, debe establecerse que dado un $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\dfrac{1}{x^2} > N$ siempre que $0 < |x - 0| < \delta$.

Observe que: $\dfrac{1}{x^2} > N \Longleftrightarrow x^2 < \dfrac{1}{N} \Longleftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{\dfrac{1}{N}} \Longleftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt{N}}$.

Luego, dado $N > 0$, escogemos $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ de tal forma que se satisfaga que $\dfrac{1}{x^2} > N$ cuando $0 < |x| < \delta$.

Si tomamos, por ejemplo, $N = 100$ entonces $\dfrac{1}{x^2} > 100$ cuando $0 < |x| < \dfrac{1}{\sqrt{100}}$, es decir, cuando $0 < |x| < \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Definición 1.5

Se dice que $f(x)$ decrece sin límite cuando x tiende a c, que se denota por $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$, si para todo número real $N < 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ siempre que$0 < |x - c| < \delta$

Gráficamente se tiene que:

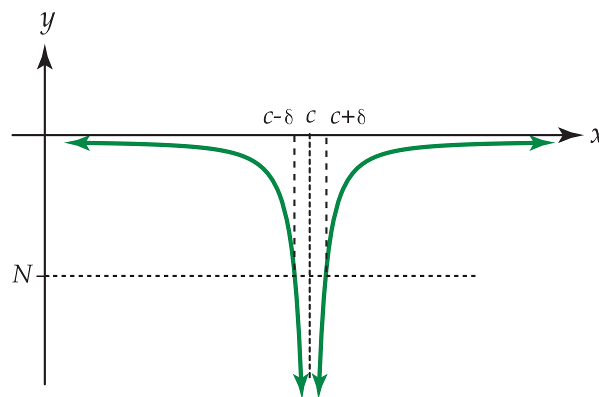
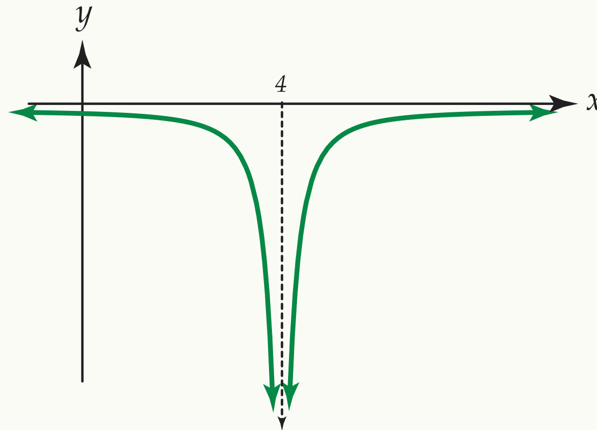


Figura 1.28 Gráfica de $f(x)$

La definición anterior afirma que es posible hacer $f(x)$ menor que cualquier número negativo N, tomando x suficientemente cerca de c.

Ejemplo 1.39

Consideremos la representación gráfica de la función f definida por $f(x) = \dfrac{-2}{(x-4)^2}$ para $x \in \mathbb{R} - \{4\}$



Demostremos ahora que $f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-2}{(x-4)^2} = -\infty$

Para hacer la prueba debe establecerse que dado un $N < 0$, existe $\delta > 0$ talque $\dfrac{-2}{(x-4)^2} < N$ siempre que $0 < |x-4| < \delta$

Observe que $\dfrac{-2}{(x-4)^2} < N \Longleftrightarrow \dfrac{-2}{N} > (x-4)^2$ (el sentido de la desigualdad cambia pues $N < 0$).

Además $\sqrt{\dfrac{-2}{N}} > \sqrt{(x-4)^2} \Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{-2}{N}} > |x-4|$.

Note que $\sqrt{\dfrac{-2}{N}}$ sí tiene sentido pues $N < 0$

Luego, $\dfrac{-2}{(x-4)^2} < N$ si y solo si $|x-4| < \sqrt{\dfrac{-2}{N}}$ por lo tanto tomamos $\delta = \sqrt{\dfrac{-2}{N}}$.

Así, dada $N < 0$, existe $\delta > 0$, $\left(\delta = \sqrt{\dfrac{-2}{N}}\right)$ tal que $\dfrac{-2}{(x-4)^2} < N$ siempre que $0 < |x-4| < \delta$

Si por ejemplo, tomamos $N = -200$ entonces $\delta = \sqrt{\dfrac{-2}{-200}}$ o sea $\delta = \sqrt{\dfrac{1}{100}} = \dfrac{1}{10}$, por lo que $\dfrac{-2}{(x-4)^2} < -200$ siempre que $0 < |x-4| < \dfrac{1}{10}$

Definición 1.6

Se dice que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a c por la derecha, y se escribe $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$, si se cumple que a cada número positivo M , (tan grande como se quiera), corresponde otro número positivo δ, (que depende de M) tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < x - c < \delta$.
Similarmente, se dice que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a c por la izquierda y se escribe $\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$ si $f(x) > M$ siempre que $0 < c - x < \delta$ (Observe que $c - x$ es mayor que cero pues $x < c$ ya que $x \to c^-$).

El comportamiento de la función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ cuando $x \to 2$, está regido por la definición anterior.

Recuerde la representación gráfica de esta función hecha anteriormente.

Los símbolos $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ se definen análogamente, escribiendo $f(x) < -M$ en vez de $f(x) > M$. (note que si $M > 0$ entonces $-M < 0$)

Gráficamente se tiene:

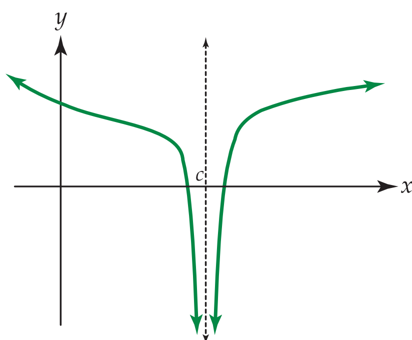


Figura 1.29 Gráfica de $f(x)$

En esta representación gráfica se tiene que tanto al acercarnos a c por la derecha como por la izquierda, los valores de la función son negativos cada vez mayores, (mayores en el valor absoluto), es decir, se tiene que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to c^-$ y cuando $x \to c^+$.

Definición 1.7

Se dice que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$ es decir, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si para cada número positivo M existe otro número positivo k, tal que $f(x) > M$ siempre que $x > k$.

Podríamos representar gráficamente este comportamiento de una función f como sigue: Observe que $x_0 > k$ y que $f(x_0) > M$. Podemos anotar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

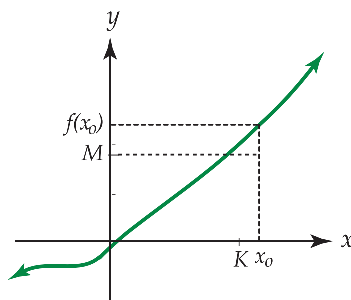


Figura 1.30 Gráfica de $f(x)$

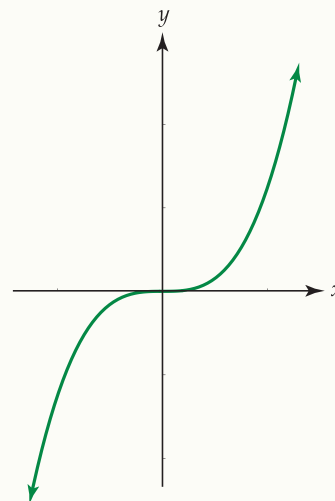
Ejemplo 1.40

Demostraremos que $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Para probar este límite, se debe establecer que dado un $M > 0$, debe existir $k > 0$ tal que $x^3 > M$ siempre que $x > K$.

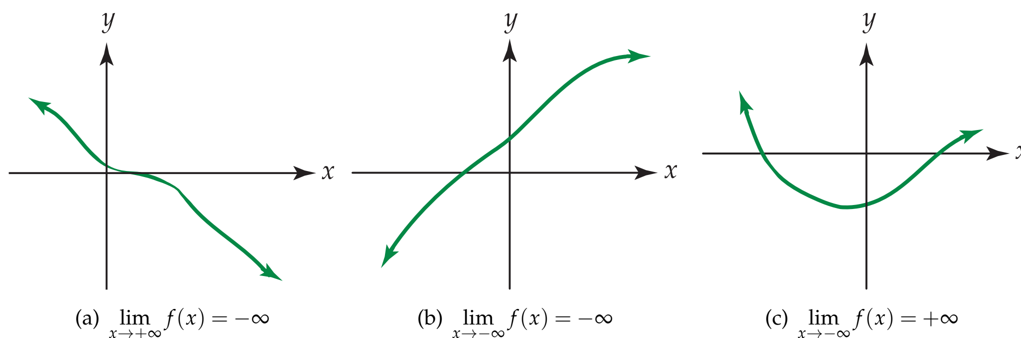
Ahora, como $x^3 > M$ si y solo si $x > \sqrt[3]{M}$, entonces, para cualquier número $M > 0$, podemos tomar $k = \sqrt[3]{M}$ de tal forma que se cumpla que $x^3 > M$ cuando $x > k$. Por ejemplo, si $M = 1000$ entonces $k = \sqrt[3]{1000} = 10$. Esto significa que $f(x) = x^3$ es mayor a 1000 siempre que x sea mayor que 10.

La representación gráfica de la función f definida por $f(x) = x^3$, con $x \in \mathbb{R}$, se puede ver a la derecha.



En forma similar a la definición anterior pueden definirse $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

En las siguientes representaciones gráficas vamos a ejemplificar el comportamiento de una función f en el que se evidencien los límites anteriores:



(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Figura 1.31 Iteración de Newton

EJERCICIOS

1.21 Determine los límites que se indican usando la gráfica:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-2^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

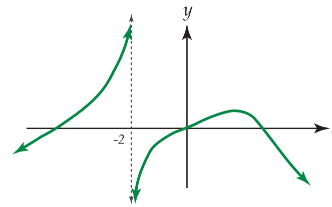


Figura 1.32 Gráfica de $f(x)$

e) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

f) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$

g) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$

h) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

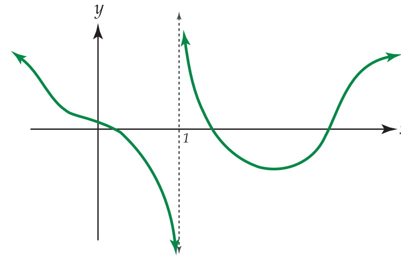


Figura 1.33 Gráfica de $g(x)$

Consideraremos ahora la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$. En las siguientes tablas vamos a evidenciar su comportamiento cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

x	5	10	15	20	25	100	1000
$\dfrac{2x}{x+1}$	1,66	1,81	1,87	1,9	1,92	1,98	1,998

x	-5	-10	-15	-20	-25	-100	-1000
$\dfrac{2x}{x+1}$	-2,4	-2,22	-2,14	-2,1	-2,08	-2,02	-2,002

En ambas tablas puede observarse que cuando x toma valores positivos o valores negativos cada vez mayores, (mayores en valor absoluto), se tiene que la función f tiende a acercarse a 2, por lo que se puede escribir que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \ \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

A continuación hacemos la respectiva representación gráfica de la función f:

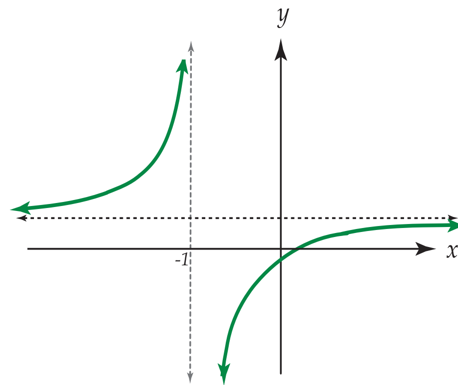


Figura 1.34 $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}, x \neq -1$

Damos ahora las definiciones para los límites cuyo resultado es una constante cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

Definición 1.8

Sea f una función con dominio K tal que para cualquier número c existen elementos de K en el intervalo $[c, +\infty[$.

El límite de f cuando x tiende a más infinito es L, que se representa $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número M tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para toda $x \in K$ y $x > M$.

Ejemplo 1.41

Probar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+2} = 1$

Hay que demostrar que para $\varepsilon > 0$ existe M tal que $\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$
si $x > M$, $e \in \mathbb{R} - \{2\}$

Se tiene que $\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| = \left| \frac{x - x - 2}{x+2} \right| = \left| \frac{-2}{x+2} \right| = \frac{2}{|x+2|}$

Si $x > -2$ entonces $|x+2| = x+2$ por lo que: $\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| = \frac{2}{x+2}$

Luego, dada $\varepsilon > 0$ se cumple que $\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$ si y solo si $\frac{2}{x+2} < \varepsilon$, o sea, si $x > \frac{2}{\varepsilon} - 2$, por lo que podemos tomar $M = \frac{2}{\varepsilon} - 2$ de tal forma que se verifique que $\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$ siempre que $x > M$.

Por ejemplo, si $\varepsilon = \frac{1}{2}$ entonces $M = 2$ por lo que: $\left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \frac{1}{2}$ si $x > 2$

La representación gráfica de la función es la siguiente:

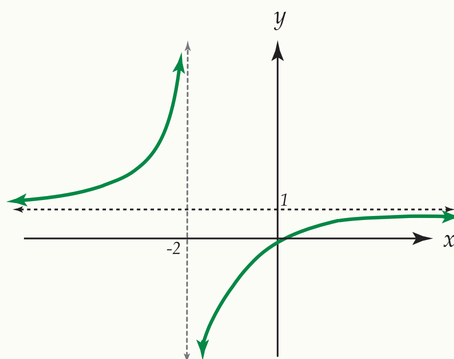


Figura 1.35 $f(x) = \frac{x}{x+2}, x \neq -2$

Definición 1.9

Sea f una función con dominio K tal que para cualquier número c, existen elementos de K en el intervalo $]-\infty, c]$.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es L, que se representa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número M tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para cada $x \in K$ y $x < M$.

EJERCICIOS

1.22 Utilizando la definición anterior y un proceso similar al desarrollado en el ejemplo inmediato anterior, pruebe que $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$

1.1.10 Teoremas sobre límites infinitos

Teorema 1.14

Si n es cualquier entero positivo, entonces se cumple que:

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n es par
3. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ si n es impar

Ejemplo 1.42

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ en este caso $n = 1$

Ejemplo 1.43

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$

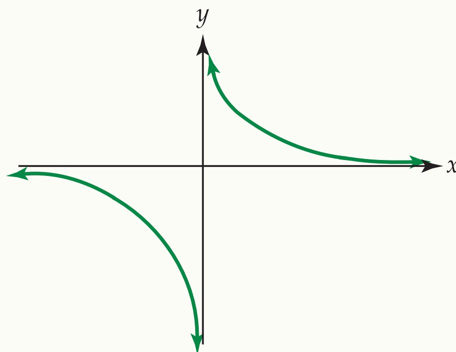
Ejemplo 1.44

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^7} = -\infty$

Ejemplo 1.45

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{con } n = 1$$

Gráficamente se tiene que:



Ejemplo 1.46

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^6} = +\infty$$

Ejemplo 1.47

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

EJERCICIOS

1.23 Determine cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^8}$

b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^3}$

c) $\lim_{x \to 0^-} \frac{5}{x^6}$

Teorema 1.15

Si c es cualquier número real, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ con $c \neq 0$, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$ si se tiene que $c > 0$ y $f(x) \to 0^+$
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$ si se tiene que $c > 0$ y $f(x) \to 0^-$
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$ si se tiene que $c < 0$ y $f(x) \to 0^+$
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$ si se tiene que $c < 0$ y $f(x) \to 0^-$

Veamos algunos ejemplos de cada uno de los casos que se mencionan en el teorema 1.15.

Ejemplo 1.48

¿ Existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x-2}$?

Observe que si se hiciera la sustitución directa se obtiene la forma indeterminada $\dfrac{4}{0}$.

Como la expresión $x-2$ puede aproximarse a cero a través de valores positivos o a través de valores negativos, estudiaremos los límites laterales como sigue:

a. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x-2} = +\infty$
   Como $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ por lo que $x-2 > 0$ y se dice que $x-2 \to 0^+$. Así, el numerador tiende a una constante positiva y el denominador tiende a 0^+.

   Luego, aplicando la parte 1 del teorema se obtiene que $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x-2} = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x-2}$

   Como $x \to 2^-$, entonces $x < 2$ por lo que $x-2 < 0$ y se tiene que $x-2 \to 0^-$. Como el numerador tiende a una constante positiva y el denominador tiende a 0^- aplicando la parte 2 del teorema 1.15 se obtiene que $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x-2} = -\infty$

Como los límites laterales son diferentes decimos que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{x-2}$ no existe.

Ejemplo 1.49

¿Existe $\lim_{x\to -1} \frac{3x}{2x+2}$?

Observe que $\lim_{x\to -1} 3x = -3$ y que $\lim_{x\to -1} (2x+2) = 0$

Como la expresión $2x+2$ puede tender hacia cero a través de valores positivos o a través de valores negativos debemos calcular los límites laterales de la siguiente forma:

a. $\lim_{x\to -1^+} \frac{3x}{2x+2}$

Como $x \to -1^+$ entonces $x > -1$ por lo que $2x > -2$ y $2x+2 > 0$ de donde $2x+2 \to 0^+$.

Así el numerador tiende a una constante negativa y el denominador tiende a 0^+, por lo que aplicando la parte 3 del teorema anterior se obtiene que $\lim_{x\to -1^+} \frac{3x}{2x+2} = -\infty$

b. $\lim_{x\to -1^-} \frac{3x}{2x+2}$

Como $x \to -1^-$ entonces $x < -1$ y $2x < -2$ de donde $2x+2 < 0$ y puede decirse que $2x+2 \to 0^-$.

Luego, el numerador tiende a una constante negativa y el denominador tiende a 0^-, por lo que aplicando la parte 4 del teorema 1.15 se obtiene que $\lim_{x\to -1} \frac{3x}{2x+2} = +\infty$

Como $\lim_{x\to -1^+} \frac{3x}{2x+2} \neq \lim_{x\to -1^-} \frac{3x}{2x+2}$ entonces $\lim_{x\to -1} \frac{3x}{2x+2}$ no existe.

EJERCICIOS

1.24 Calcular cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{1-x}{3x+6}$

b) $\lim_{x\to 4} \frac{2-x}{2-\frac{x}{2}}$

Teorema 1.16

Sean f y g funciones con dominios D_1 y D_2 respectivamente y sea "a" un número tal que todo intervalo abierto que contenga a "a" contiene números diferentes de "a" en $D_1 \cap D_2$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ entonces

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$ si $c > 0$
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$ si $c < 0$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ejemplo 1.50

Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \left(5x + \dfrac{6}{(2x-4)^2} \right)$

Solución: En este caso $\lim\limits_{x \to 2} 5x = 10$ y $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{6}{(2x-4)^2} = +\infty$ pues $(2x+4)^2 \to 0^+$ y en el numerador se tiene una constante positiva, obteniéndose el resultado anterior al aplicar la parte 1 del teorema 1.2.

Luego: $\lim\limits_{x \to 2} \left(5x + \dfrac{6}{(2x-4)^2} \right) = +\infty$

Ejemplo 1.51

Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{2x+3}{\frac{1}{x-1}} \right]$

Solución: En este caso se tiene que $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x+3) = 5$ y que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ (por parte 1 del teorema 1.2). Y del teorema 1.3 concluimos que $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{2x+3}{\frac{1}{x-1}} \right] = 0$

Ejemplo 1.52

Calcule $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2-x}{x+3}$

Solución: Este límite anterior puede escribirse como $\lim\limits_{x\to -3^+} \left((2-x)\cdot \dfrac{1}{x+3} \right)$ siendo $f(x) = (2-x)$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$

Calculamos el $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{1}{x+3}$

Como $x \to -3^+$ entonces $x > -3$ y $x+3 > 0$; además la constante en el numerador es positiva por lo que aplicando la parte 1 del teorema 1.2 se tiene que $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{1}{x+3} = +\infty$

Ahora, el $\lim\limits_{x\to -3^+} (2-x) = 5$, $(5 > 0)$ y aplicando la parte 2 del teorema 1.16 se tiene que

$$\lim_{x\to -3^+} \left[(2-x)\cdot \frac{1}{x+3} \right] = +\infty$$

Teorema 1.17

Sean f y g dos funciones y "a" un número con la propiedad mencionada en el teorema 1.3.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = -\infty$ si $c > 0$
3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = +\infty$ si $c < 0$
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Prueba: (Similar a la del teorema 1.3).

Ejemplo 1.53

Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{3x}{\frac{x}{2}-1}\right)$

Solución: Este límite puede escribirse como $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[3x\cdot\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}\right]$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x = 6$ y $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}\right) = -\infty$,

aplicando la parte 2 del teorema 1.4 se obtiene que $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{3x}{\frac{x}{2}-1}\right) = -\infty$

Ejemplo 1.54

Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}+4x\right]$

Solución: En este caso $f(x) = 4x$ y $g(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}$

Calculemos $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}$

Si $x\to 2^-$ entonces $x<2$, $\dfrac{x}{2}<1$ y $\dfrac{x}{2}-1<0$ por lo que puede decirse que $\dfrac{x}{2}-1\to 0^-$

Como la constante en el numerador es positiva, aplicando la parte 2 del teorema 1.2 se deduce que:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1} = -\infty$

Por otra parte $\lim\limits_{x\to 2} 4x = 8$, y aplicando el punto 1 del teorema 1.4 se obtiene que $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}+4x\right] = -\infty$

Ejemplo 1.55

Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1-4x}{\frac{x}{2}-1}\right)$

Solución: El límite anterior puede escribirse como $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[(1-4x)\cdot\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}\right]$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-}(1-4x) = -7$, $(-7<0)$, y $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\frac{x}{2}-1} = -\infty$, entonces aplicando el punto 3 del teorema 1.4 se obtiene que:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1-4x}{\frac{x}{2}-1}\right) = +\infty$$

Ejemplo 1.56

Calcule $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{5+x}{(9+3x)^{-1}} = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{5+x}{\frac{1}{9+3x}}$

Solución: En este caso se tiene que $\lim\limits_{x\to -3^-}(5+x)=2$ y $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{1}{9+3x}=-\infty$ por parte 2 del teorema 1.2 (compruébelo). Luego aplicando el punto 4 del teorema 1.4 se tiene que:

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{5+x}{\frac{1}{9+3x}} = 0$$

EJERCICIOS

1.25 Calcule los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x}{2+x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-x}{2x-8}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x}{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

Teorema 1.18

Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ entonces se cumple que:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=+\infty$

Prueba: (Ejercicio para el estudiante).

Ejemplo 1.57

Calcular: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right]$

Solución: En este caso calculemos: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{(x-2)^2}$ y $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Como $x\to 2^+$ entonces $x>2$ y $x-2>0$ por lo que $(x-2)^2>0$ y $\sqrt{x-2}>0$ o sea $(x-2)^2\to 0^+$ y $\sqrt{x-2}\to 0^+$. Luego, se tiene que $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{(x-2)^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}=+\infty$ (por teorema 1.2), y concluimos de acuerdo al teorema 1.18 que:

$$\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right]=+\infty$$

EJERCICIOS

1.26 Calcule cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{3x}{2-2x}+\dfrac{5}{x-1}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{15x}{(2-2x)(x-1)}\right]$

Teorema 1.19

Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = +\infty$

Ejemplo 1.58

Calculemos:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2-x}{x+3} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3^-}\frac{2x}{(x+3)^2}$$

Como $x\to -3^-$ entonces $x<-3$ por lo que $x+3<0$, o sea $x+3\to 0^-$ y $(x+3)^2\to 0^+$. Luego, se tiene que $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2-x}{x+3} = -\infty$ (por teorema 1.2 parte 2) y $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x}{(x+3)^2} = -\infty$ (por teorema 1.2).

Entonces, utilizando el teorema 1.19 se tiene que:

$$\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{2-x}{(x+3)}+\frac{2x}{(x+3)^2}\right] = -\infty$$

$$\text{y} \lim_{x\to -3^-}\left[\frac{2-x}{x+3}\cdot\frac{2x}{(x+3)^2}\right] = +\infty$$

EJERCICIOS

1.27 Calcule los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\dfrac{3+x}{x-2}+\dfrac{x-5}{\sqrt{2-x}}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\dfrac{3+x}{x-2}\cdot\dfrac{x-5}{\sqrt{2-x}}\right]$

Teorema 1.20

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces:
$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = -\infty$

Ejemplo 1.59

Calculemos:

$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{x-2}$ y $\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x}{x-2}$

Como $x \to 2^+$ entonces $x-2 \to 0^+$ además $3x \to 6$ y $1-x \to -1$ cuando $x \to 2^+$.

Luego, se tiene que: $\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{x-2} = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x}{x-2} = -\infty$ y aplicando el teorema 1.20 tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^+} \left[\frac{3x}{x-2}\cdot\frac{1-x}{x-2}\right] = -\infty$$

EJERCICIOS

1.28 Calcule $\lim_{x\to -1} \left[\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x+1}\right]$

Nota: Los teoremas del 1.1 al 1.7 son válidos cuando $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

Teorema 1.21

Si $p > 0$ es un número real, entonces $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$

Ejemplo 1.60

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

Ejemplo 1.61

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} &= 5\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\\ &= 5\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 1.62

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x^3}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x^3}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 1.63

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x(1+\frac{1}{x})}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\\ &= 0\cdot\frac{1}{1+0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 1.64

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}} = 0$$

Teorema 1.22

Si p es un número positivo tal que x^p es un número real para $x<0$, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$

Nota: Observe que, como x está creciendo a través de valores negativos es necesario que x^p sea un número real, por lo que no tienen sentido expresiones como: $x^{\frac{1}{2}}$ o $x^{\frac{3}{4}}$.

Ejemplo 1.65

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^4}=0$$

Ejemplo 1.66

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{5+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 1.67

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x^5}=0$$

Ejemplo 1.68

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{-x}}=0$$

Note que si $x\to-\infty$ entonces $-x\to+\infty$ por lo que $\sqrt{-x}$ sí tiene sentido cuando $x\to-\infty$.

Daremos ahora ejemplos de límites cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$. Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ factorizamos la variable de mayor exponente como se evidencia a continuación.

Ejemplo 1.69

$\lim_{x\to+\infty} (3x^3 - x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (3x^3 - x^2 + 1) &= \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(3 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty\end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^3} \to 0$ y $x^3 \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$

Ejemplo 1.70

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{2x-3}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{2x-3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(2-\frac{3}{x})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Pues $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$

EJERCICIOS

1.29 $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 - x^2 + 1}{4x^3 - 2x + 1}$ (Respuesta: $\frac{5}{4}$)

Ejemplo 1.71

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 5}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x(3 + \frac{5}{x})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{(3 + \frac{5}{x})} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Recuerde que $\frac{1}{x} \to 0$, y $\frac{1}{x^2} \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

Ejemplo 1.72

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+6x-1}{x^3-x^2+3x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+6x-1}{x^3-x^2+3x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(5+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{5+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{x(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3})} \\ &= 0 \text{ (por teorema 1.8)}\end{aligned}$$

Observe que al evaluar, el numerador tiende a una constante (5), y el denominador tiende a $+\infty$.

Ejemplo 1.73

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2+5x+1}-2x]$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2+5x+1}-2x] &= \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right]\end{aligned}$$

Como x está definida a través de valores positivos entonces $|x| = x$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to+\infty} \left[x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right] \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Observe que $x \to +\infty$ y que la expresión dentro del paréntesis tiende a -1.

Ejemplo 1.74

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4+2x^2+1}-1}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4+2x^2+1}-1}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4(3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})}-1}{2x-1} \quad \text{(Recuerde } \sqrt[n]{x^n}=|x| \text{ si } n \text{ es par)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt[4]{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-1}{2x-1}$$

Como x crece a través de valores negativos se tiene que $|x|=-x$.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt[4]{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-1}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt[4]{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{x}\right)}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt[4]{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt[4]{3}}{2}$$

EJERCICIOS

1.30 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{5x^3+x^2-1}+2x}{3x^2+1}$ (Respuesta: 0)

Ejemplo 1.75

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-x}{\sqrt{x+2}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-x}{\sqrt{x+2}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}{\sqrt{x(1+\frac{2}{x})}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = -\infty$$

Note que $\sqrt{x}\to+\infty$ cuando $x\to+\infty$

Ejemplo 1.76

$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{2x^2+x+4} - \sqrt{2x^2+3x-2}]$

Observe que:

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+4} = \lim_{x\to+\infty} |x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+3x-2} = \lim_{x\to+\infty} |x|\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}} = +\infty$

Luego se presenta la forma $+\infty - (+\infty)$ para la que no tenemos ningún teorema que nos permita dar el resultado.

Cuando se presenta esta situación, primero racionalizamos y luego evaluamos el límite con el proceso que ya conocemos. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2+x+4} - \sqrt{2x^2+3x-2}\right)\\
= &\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{2x^2+x+4} - \sqrt{2x^2+3x-2}\right] \cdot \frac{\sqrt{2x^2+x+4} + \sqrt{2x^2+3x-2}}{\sqrt{2x^2+x+4} + \sqrt{2x^2+3x-2}}\\
= &\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+4-(2x^2+3x-2)}{\sqrt{2x^2+x+4} + \sqrt{2x^2+3x-2}}\\
= &\lim_{x\to+\infty} \frac{6-2x}{x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} + x\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}}\\
= &\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\frac{6}{x}-2)}{x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} + \sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right]}\\
= &\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6}{x}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} + \sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \frac{0-2}{\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2+0+0}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.77

$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+1})$

Observe que: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-\frac{1}{x}} = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}} = -\infty$

Por lo que en este caso se presenta la forma $+\infty - (-\infty)$, o sea, $+\infty + \infty$ para la que sí existe un teorema y concluimos que:

$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt[3]{x^3+1}) = +\infty$

EJERCICIOS

1.31 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{5-9x}}{\sqrt{-4x-5}-1}$ (Respuesta: 2)

1.1.11 Límites que involucran la función exponencial y la función logarítmica

Recordemos primero el comportamiento de la función exponencial y el de la función logarítmica.

1. Función exponencial creciente:

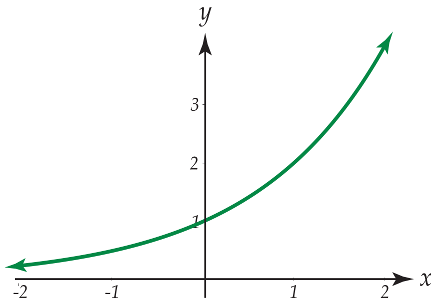


Figura 1.36 $f(x) = a^x$, con $a > 1$

Note que:

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

2. Función exponencial decreciente:

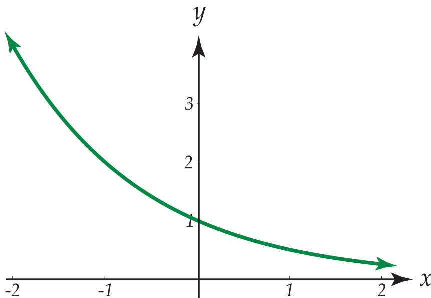


Figura 1.37 $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$

Note que:

$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

3. Función logarítmica de base e:

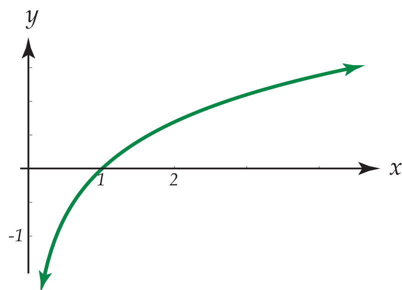


Figura 1.38 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$

■ Observe que: $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

■ Además $\lim_{x\to1^+} \ln x = 0^+$ y $\lim_{x\to1^-} \ln x = 0^-$

■ Si $x \to 1^+$ entonces $x > 1$ y $\ln x > \ln 1$, o sea $\ln x > 0$ y por tanto $\ln x \to 0^+$.

■ Si $x \to 1^-$ entonces $x < 1$ y $\ln x < \ln 1$ por lo que $\ln x < 0$ y $\ln x \to 0^-$

Tomando en cuenta las representaciones gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas, estudiaremos límites que involucran funciones de la forma $G(x) = K^{f(x)}$ con k constante.

Ejemplo 1.78

¿Existe $\lim_{x\to 2} 3^{2/(2-x)}$?

En este caso se tiene la función exponencial de base 3. Observe que en la expresión $\dfrac{2}{2-x}$ el denominador tiende a cero cuando $x \to 2$, por lo que analizaremos el comportamiento de esta expresión cuando $x \to 2^+$, y cuando $x \to 2^-$.

a. Si $x \to 2^+$ entonces $x > 2$, $2 - x < 0$, por lo que $-x + 2 \to 0^-$ y $\dfrac{2}{2-x} \to -\infty$ (Teorema 1.2)

   Como $\dfrac{2}{2-x} \to -\infty$ cuando $x \to 2^+$ entonces $3^{2/(2-x)} \to 0$ pues estamos trabajando con la función exponencial con base mayor que 1.

   Luego $\lim_{x\to 2^+} 3^{2/(2-x)} = 0$

b. Si $x \to 2^-$ entonces $x < 2$, $(2-x) > 0$, por lo que $(2-x) \to 0^+$ y $\dfrac{2}{2-x} \to +\infty$

   Como el exponente de la función exponencial tiende a más infinito entonces:

   $3^{2/(2-x)} \to +\infty$ cuando $x \to 2^-$ y por tanto $\lim_{x\to 2^-} 3^{2/(2-x)}$.

Como los límites laterales son diferentes entonces $\lim_{x\to 2} 3^{2/(2-x)}$ no existe.

Ejemplo 1.79

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/x+1}$$

Tratamos nuevamente con la función exponencial, pero ahora la base es $a = \dfrac{1}{4}$ con $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ (Revise la representación gráfica de $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$.)

Calculamos los límites laterales nuevamente pues el denominador de la expresión $\dfrac{2x}{x+1}$ tiende a cero cuando $x \to -1$.

Ejemplo 1.79 (continuación).

a. $\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)}$

Si $x \to -1^+$ entonces $x > -1$ y $x + 1 > 0$ por lo que $x + 1 \to 0^+$ y como $2x \to -1$ se tiene que $\frac{2x}{x+1} \to -\infty$

Luego $\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)} = +\infty$

b. $\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)}$

Si $x \to -1^-$ entonces $x < -1$ y $x + 1 < 0$ por lo que $x + 1 \to 0^-$ y como $2x \to -1$ entonces $\frac{2x}{x+1} \to +\infty$.

Luego $\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)} = 0$.

Como $\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)} \neq \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)}$ entonces $\lim_{x \to -1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x/(x+1)}$ no existe.

Ejemplo 1.80

$\lim_{x \to -1} \frac{4x+1}{\ln(2x+3)}$

Observe que cuando $x \to -1$ se tiene que $4x + 1 \to -3$ y $2x + 3 \to 1$ por lo que $\ln(2x + 3) \to 0$. Como el numerador tiende a una constante, y el denominador tiende a cero, es necesario calcular los límites laterales como sigue:

a. $\lim_{x \to -1^+} \frac{4x+1}{\ln(2x+3)}$

Como $x \to -1^+$ entonces $x > -1$ y $2x > -2$ por lo que $2x + 3 > -2 + 3$ y por tanto $2x + 3 > 1$, de donde $\ln(2x + 3) > \ln 1$ y se tiene que $\ln(2x + 3) \to 0^+$

Luego $\lim_{x \to -1^+} \frac{4x+1}{\ln(2x+3)} = -\infty$

b. $\lim_{x \to -1^-} \frac{4x+1}{\ln(2x+3)}$

Como $x \to -1^-$ entonces $x < -1$ y $2x < -2$ por lo que $2x + 3 < -2 + 3$ y por tanto $2x + 3 < 1$, de donde $\ln(2x + 3) < \ln 1$ o sea que $\ln(2x + 3) < 0$ y se tiene que $\ln(2x + 3) \to 0^-$

Ejemplo 1.80 (continuación).

Por tanto: $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{4x+1}{\ln(2x+3)} = +\infty$

Luego $\ln(2x+3) < \ln 1$ o sea que $\ln(2x+3) < 0$ y se tiene que $\ln(2x+3) \to 0^-$

Por tanto: $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{4x+1}{\ln(2x+3)} = +\infty$

Como los límites laterales son diferentes, se concluye que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x+1}{\ln(2x+3)}$ no existe.

EJERCICIOS

1.32 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{\ln(3-x)}$ (Respuesta: no existe)

1.33 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3}{4\ln(2x-1)}$ (Respuesta: no existe)

Ejemplo 1.81

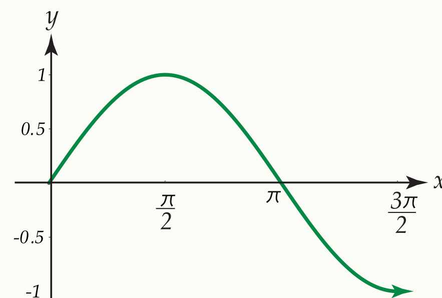
Calcular $\lim\limits_{x\to \pi} a^{\csc x}$

Solución: Se deben analizar dos casos:

i. $a > 1$

ii. $0 < a < 1$

Además se debe tomar en cuanta el comportamiento de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en los alrededores de $x = \pi$, pues $\operatorname{sen}\pi = 0$ y $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ por lo que el denominador tiende a cero cuando $x \to \pi$.



La representación gráfica de la función $\operatorname{sen} x$, en el intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ está a la derecha.

Ejemplo 1.81 (continuación).

Observe que cuando $x \to \pi^+$ se tiene que $\operatorname{sen} x \to 0^-$ y que cuando $x \to \pi^-$ entonces $\operatorname{sen} x \to 0^+$, por lo que $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

Ahora analicemos el límite indicado.

i. Cuando $a > 1$:

1) $\lim\limits_{x\to\pi^+} a^{\csc x} = \lim\limits_{x\to\pi^+} a^{1/\operatorname{sen} x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\pi^-} a^{\csc x} = \lim\limits_{x\to\pi^-} a^{1/\operatorname{sen} x} = +\infty$

Como los límites laterales son diferentes entonces $\lim\limits_{x\to\pi} a^{\csc x}$ no existe.

ii. Cuando $0 < a < 1$:

1) $\lim\limits_{x\to\pi^+} a^{\csc x} = \lim\limits_{x\to\pi^+} a^{1/\operatorname{sen} x} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\pi^-} a^{\csc x} = \lim\limits_{x\to\pi^-} a^{1/\operatorname{sen} x} = 0$

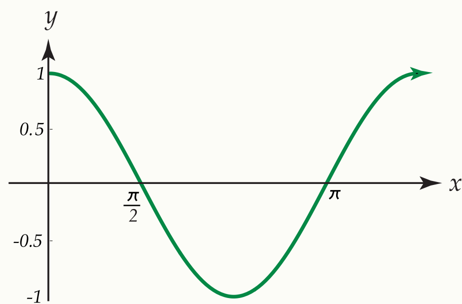
Luego, los límites laterales son diferentes por lo que $\lim\limits_{x\to\pi} a^{\csc x}$ no existe.

Ejemplo 1.82

Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\ln 3)^{-\tan x}$

Solución: En este caso la base de la función exponencial es $\ln 3$ y $\ln 3 > 1$.

Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\cos x \to 0$ cuando $x \to \dfrac{\pi}{2}$, analicemos la gráfica de $y = \cos x$ cuando $x \to \dfrac{\pi}{2}$, analicemos la gráfica de $y = \cos x$ en los alrededores de $\dfrac{\pi}{2}$:



Si $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$ entonces $\cos x \to 0^-$ por lo que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to -\infty$ y $\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \to +\infty$, es decir, $-\tan x \to +\infty$.

Si $x \to \dfrac{\pi^-}{2}$ entonces $\cos x \to 0^+$ por lo que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to +\infty$ y $\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \to -\infty$, o sea, $-\tan x \to -\infty$.

Luego al calcular los límites laterales se tiene que: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\ln 3)^{-\tan x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\ln 3)^{-\tan x} = 0$,

por lo que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\ln 3)^{-\tan x}$ no existe.

EJERCICIOS

1.34 $\lim_{x \to 2\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^{\cot x}$ (Respuesta: no existe.)

1.2 Continuidad de funciones

1.2.1 Introducción

Cuando empezó a desarrollarse el cálculo, la mayor parte de las funciones con las que se trabajaba eran continuas, y por lo tanto no se sentía la necesidad de penetrar en el significado exacto de continuidad. Fue ya entrado el siglo XVIII que se presentaron algunas funciones discontinuas en conexión con distintas clases de problemas físicos. En particular, los trabajos de J.B.J. Fourier (1758-1830) sobre la Teoría del calor, obligaron a los matemáticos de principios de siglo XIX a examinar cuidadosamente el significado de los conceptos de función y continuidad.

A pesar de que el significado de la palabra "continuo" parece intuitivamente clara a todo el mundo, no es fácil imaginarse cuál sería una buena definición de esta idea. Un diccionario popular da la siguiente definición de continuidad:

Continuidad: Cualidad o condición de ser continuo.

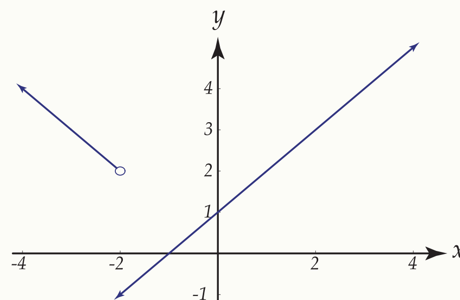
Continuo: Que tiene continuidad entre las partes.

Intentar aprender el significado de continuidad únicamente a partir de estas dos definiciones, es lo mismo que intentar aprender chino con sólo un diccionario chino. Una definición matemática satisfactoria de continuidad, expresada enteramente por medio de las propiedades del sistema de los números reales, fue formulada por primera vez en 1821 por el matemático francés Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) (Apostol, 1977, 156). Antes de dar la definición de continuidad de una función en un punto, veremos el comportamiento de algunas funciones que no son continuas.

Ejemplo 1.83

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq -2 \\ -x & x < -2 \end{cases}$

Su representación gráfica está a la derecha.

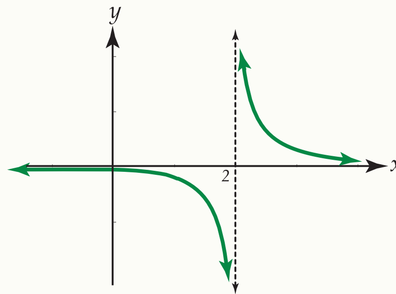


En este caso la función f está definida en -2 pues $f(-2) = -1$.

Sin embargo el $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe ya que $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x+1) = -1$ y $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (-x) = 2$ por lo que los límites laterales son distintos.

Ejemplo 1.84

Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$. Su representación gráfica es la siguiente:



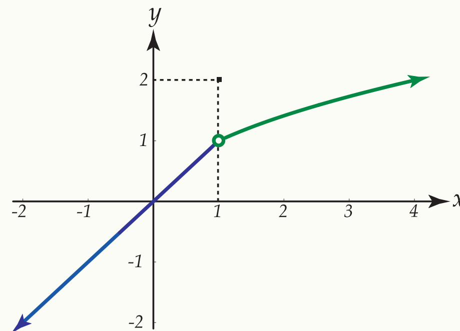
Note que la función g no está definida en 2 y que además $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ no existe pues $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$.

Ejemplo 1.85

Consideremos ahora la función h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si \quad x > 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ x & si \quad x < 1 \end{cases}$$

Su representación gráfica es la siguiente:



En este caso, la función h está definida en 1 pues $h(1) = 2$, además $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ existe y es igual a 1, pero $\lim\limits_{x\to 1} h(x) \neq h(1)$.

Puede observarse que las gráficas de las funciones f, g y h, presentan "saltos bruscos" o discontinuidades en los puntos en los que no está definida la función o en los puntos, en los que aún cuando la función está definida, el límite de la función en ese punto no existe, o su valor es diferente al que toma la función en ese punto. Luego,

debemos establecer condiciones bajo las cuales se sepa con certeza cuándo una función es continua. De los ejemplos anteriores podemos deducir intuitivamente lo que se establece en la siguiente definición.

1.2.2 Definición de continuidad

Definición 1.10

Se dice que una función f es continua en c si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida, (o sea, c pertenece al dominio de f).
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

La función f será discontinua en c si por lo menos una de las condiciones anteriores no se cumple.

Ejemplo 1.86

Determine si la función h definida por

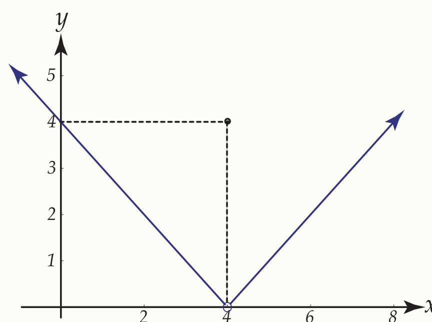
$$h(x) = \begin{cases} |x-4| & si \quad x \neq 4 \\ 4 & si \quad x = 4 \end{cases}$$

es o no continua en $x = 4$.

Se tiene que $h(4) = 3$ (es decir, 4 pertenece al dominio de h).
Además $\lim_{x \to 4} |x-4| = |4-4| = 0$.

Pero $\lim_{x \to 4} h(x) \neq h(4)$ por lo que h es discontinua en $x = 4$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



Ejemplo 1.87

Determinar si la función f definida por $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x}$ es continua en $x = 2$.

Primero, $f(2) = \dfrac{3 \cdot 2}{4 - 2} = 3$ por lo que f está definida en 2.

Calculemos $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x}{x^2 - x} = \dfrac{3 \cdot 2}{4 - 2} = 3$ (de aquí $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe).

Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ entonces f es continua en $x = 2$.

Note que f no está definida ni en $x = 1$, ni en $x = 0$ por lo que f es discontinua en esos puntos.

Ejemplo 1.88

Sea f la función definida

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & si \quad x \neq -2 \\ -3 & si \quad x = -2 \end{cases}$$

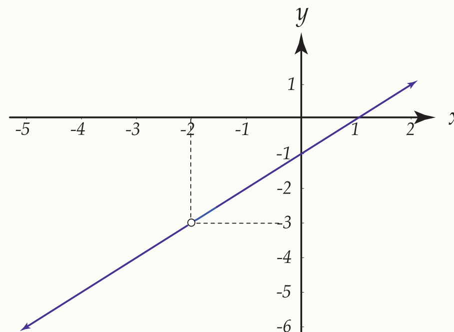
Determinar si f es continua en $x = -2$.

Según la definición de la función $f(-2) = -3$.

Además $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} (x - 1) = -3$.

Luego $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$ por lo que f es continua en $x = -2$.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



EJERCICIOS

1.35 Determine si la función f definida por $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ es o no continua en $x = 0$.

1.36 Similarmente para la función h, definida por $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$, en los puntos $x = -1$ y $x = 3$.

1.2.3 Discontinuidades evitables

Si una función f es discontinua en $x = a$ pero se tiene que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces sucede que $f(a)$ no existe o que $\lim_{x \to a} f(x)$ es diferente de $f(a)$. Ambas situaciones se ilustran a continuación:

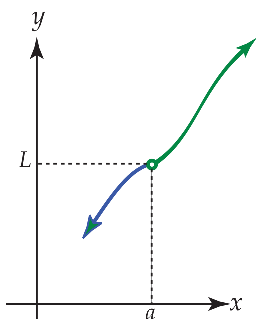


Figura 1.39 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $f(a)$ no existe

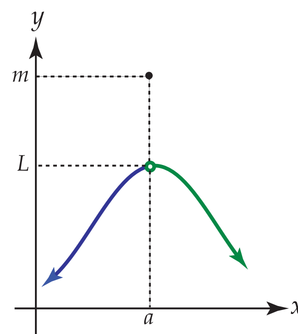


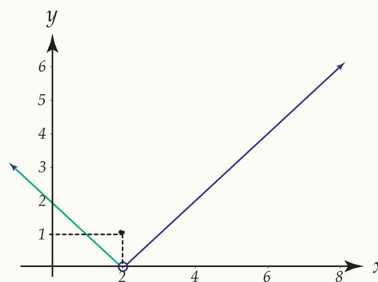
Figura 1.40 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $f(a) = m$ $(L \neq m)$

En ambos casos, la discontinuidad de la función puede evitarse predefiniendo la función de tal forma que $f(a)$ sea igual al resultado del $\lim_{x \to a} f(x)$.

Ejemplo 1.89

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} |2-x| & si \quad x \neq 2 \\ 1 & si \quad x = 2 \end{cases}$

Determinemos si f es continua en $x = 2$.



Se tiene que $f(2) = 1$ y que $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} |2 - x| = |2 - 2| = 0$.

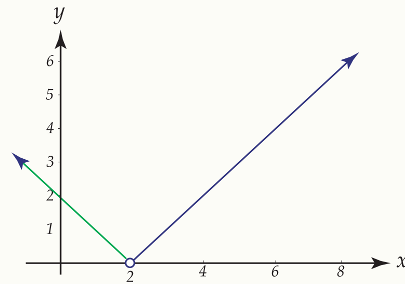
Se observa que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe pero es diferente de $f(2)$.

Luego, si le asignamos a $f(2)$ el valor de 0 (cero), la función es continua. Puede escribirse de nuevo la definición de f como sigue:

Ejemplo 1.89 (continuación).

$$f(x) = \begin{cases} |2-x| & si \quad x \neq 2 \\ 0 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

La nueva situación se observa a la derecha,



La discontinuidad será inevitable o esencial si el límite de la función en el punto de discontinuidad no existe.

Ejemplo 1.90

Consideremos la función definida por

$$f(x) : \begin{cases} x^2 - 4 & si \quad x > 2 \\ x & si \quad x < 2 \end{cases}$$

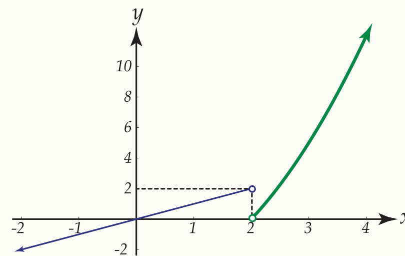
Analicemos la continuidad en $x = 2$.

Como f no está definida en 2, automáticamente f es discontinua en ese valor. Sin embargo, si el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe puede redefinirse la función para que sea continua. Calculemos por tanto el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Para ello vamos a analizar los límites laterales como sigue: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2$.

Como los límites laterales son diferentes entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe y la discontinuidad es inevitable, ya que no podemos redefinir la función.

La representación gráfica de la función f es la siguiente:



EJERCICIOS

1.37 Para cada una de las funciones definidas a continuación, determine si la función es o no continua en el valor de c especificado.

En caso de discontinuidad, especifique si ésta es evitable o no. Si la discontinuidad es evitable, escriba la nueva definición de la función.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+5} & si \quad x \neq -5 \\ 0 & si \quad x = -5 \end{cases} \quad ;c = -5$

b) $g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t - 3} & si \quad t \neq 3 \\ 4 & si \quad t = 3 \end{cases} \quad ;c = 3$

c) $h(r) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{r+2} - \sqrt{2}}{r} & si \quad r \neq 0 \\ 2 & si \quad r = 0 \end{cases} \quad ;c = 0$

1.2.4 Continuidad en un intervalo [a,b]

Una función f definida en un intervalo $[a,b]$, es continua en el intervalo si:

a. f es continua para todo x tal que $x \in [a,b]$.

b. f es continua por la derecha en "a".

c. f es continua por la izquierda en "b".

Es decir, f es continua en $[a,b]$ si:

a. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ \forall \ x_0 \in \ ]a,b[$.

b. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

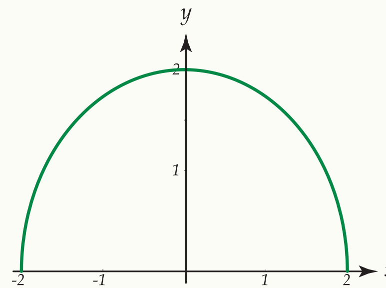
c. $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Ejemplo 1.91

Consideremos la función f definida por $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Esta función es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$, ya que si $x_0 \in]-2,2[$ se tiene que $\lim_{x \to x_0} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(x_0)^2} = f(x_0)$; además $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(-2)$ y $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2)$.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



También se tiene que una función f definida en el intervalo $[a,b[$, es continua en ese intervalo, si y solo si es continua en el intervalo abierto $]a,b[$ y es continua por la derecha de "a".

Similarmente, para que una función f definida en el intervalo $]a,b]$ sea continua en ese intervalo, es necesario que f sea continua en el intervalo abierto $]a,b[$ y a la vez que sea continua por la izquierda en "b".

Ejemplo 1.92

Consideremos la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ en el intervalo $[0,2[$.

Para $x_0 \in]0,2[$, se tiene que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2-x_0}} = f(x_0)$.

Además $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que la función es continua por la derecha en $x=0$. Luego f es continua en $[0,2[$.

Ejemplo 1.93

Considere la función f definida por $f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$ en el intervalo $\left]\dfrac{-3}{2},2\right]$.

Para $c \in \left]\dfrac{-3}{2},2\right[$ se tiene que $f(c) = \dfrac{4}{2c+3}$ y $\lim_{x \to c} \dfrac{4}{2x+3} = \dfrac{4}{2c+3}$ por lo que f es continua en $\left]\dfrac{-3}{2},2\right[$.

Además, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{4}{2x+3} = \dfrac{4}{7} = f(2)$ y f es continua por la izquierda en 2.

Luego f es continua en el intervalo $\left]\dfrac{-3}{2},2\right[$.

1.2.5 Definición de continuidad utilizando ϵ y δ

Según la definición de continuidad, una función f es continua en un punto c si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Utilizando la definición de límite, la anterior desigualdad significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Sin embargo, ahora la restricción $0 < |x - c|$ no es necesaria, ya que si toma $|x - c| = 0$ entonces $x = c$ y $f(x) = f(c)$ por lo que $|f(x) - f(c)| = 0$ y cero es menor que ε, lo cual cumple con lo que estipula la definición de límite.

Luego puede decirse que una función f es continua en c si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Note que si la función f es continua en c, entonces el punto $(c, f(c))$ está en la gráfica de f y existen puntos de ella tan cercanos como se desee al punto $(c, f(c))$.

Según la definición dada de continuidad, dada una $\epsilon > 0$ y para cualquier selección de las rectas cuyas ecuaciones son $y = f(c) - \epsilon$, $y = f(c) + \epsilon$, existen rectas con ecuaciones $x = c - \delta$, $x = c - \delta$ tales que la parte gráfica de f que está entre las dos últimas líneas, queda enteramente contenida en el rectángulo determinado por las cuatro rectas ya mencionadas, como se muestra en la figura siguiente:

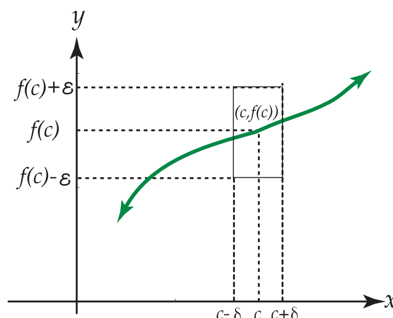


Figura 1.41 Gráfica de $f(x)$

1.2.6 Teoremas sobre continuidad de funciones

Teorema 1.23

Si las funciones f y g son continuas sobre los intervalos U_1 y U_2 respectivamente y si $U = U_1 \cup U_2$ entonces:

a. $f + g$ es continua sobre el intervalo U.

b. $f - g$ es continua sobre U.

c. $f \cdot g$ es continua sobre U (Producto de dos funciones).

d. $\dfrac{f}{g}$ es continua sobre U, excepto para $a \in U$ tal que $g(a) = 0$.

Teorema 1.24

La función f definida por $f(x) = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio real, es continua para todo número real.

(Recuerde que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{0,1,...,n\}$).

Según el teorema, algunos ejemplos de funciones continuas son las siguientes:

$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 6x + 1.$

$g(x) = \sqrt{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x - 6.$

Ejemplo 1.94

La función f definida por $f(x) = \dfrac{5x^4 - 3x^3 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ es continua para todo $x \in \mathbb{R} - \{-2,-1,1\}$, ya que el polinomio en el denominador se hace cero cuando se evalúa en $x = -2$, $x = -1$ o $x = 1$.

Ejemplo 1.95

La función g definida por $g(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 1}{x^2 + 7x + 12}$ es continua para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq -3$ y $x \neq -4$.

Teorema 1.25

Sean f y g dos funciones tales que $f = \{(x,u)/u = f(x)\}$ y $g = \{(u,y)/y = g(u)\}$

Además $\lim_{x \to c} f(x) = d$ y g es continua en d.

Entonces $\lim_{x \to c} g[f(x)] = g \cdot \left[\lim_{x \to c} f(x)\right] = g(d)$

Ejemplo 1.96

labelC1ejem96 Sean f y g dos funciones tales que:

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Como $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 5$ y g es continua para $x = 5$ pues $\lim_{x\to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5} = g(5)$, entonces $\lim_{x\to 2} g[f(x)] = \lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+1)} = \sqrt{5}$.

Teorema 1.26

Si g es una función continua en c y f es una función continua en $g(c)$, entonces la composición de funciones $f \, o \, g$ es continua en c.

Nota: La continuidad de la composición de funciones es válida para cualquier número finito de funciones, siempre y cuando se cumpla que cada función sea continua en su respectivo argumento.

Ejemplo 1.97

1. Sean f y g dos funciones definidas por las siguientes ecuaciones $g(x) = x^2 + 2x + 1$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

   Note que g es una función polinomial y por lo tanto continua para todo $x \in \mathbb{R}$. La función es continua para $x \in [0, +\infty[$.

   Luego la función $h = (fog)(x) = f(x^2 + 2x + 1) = \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}$ será continua para los valores de x tales que $x^2 + 2x + 1$ sea mayor o igual que cero.

   Como $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2$ y $(x+1)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces la función h será continua para todo valor real.

2. Consideremos las funciones definidas por $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $g(x) = 3x + 1$. La función f es continua para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, y la función g es continua para todo valor real por ser función polinomial.

   Luego la función $h = f \ o \ g$, dada por $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}$ seá continua siempre $3x + 1 \neq 0$, es decir, siempre que $x \neq \frac{-1}{3}$.

3. La función f definida por $h(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x+1}\right)$ es continua siempre que $\frac{x^2-4}{x+1}$ sea mayor que cero.

   Esta última condición se satisface cuando $x \in]-2, -1[\cup]2, +\infty[$.

Teorema 1.27

La función seno definida por $y = \operatorname{sen} x$ es continua sobre todo su dominio, es decir, sobre todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.98

La función f definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{6}{x}\right)$ es continua siempre que x sea diferente de cero, pues en $x = 0$ se tiene que $\frac{6}{x}$ no está definida.

Teorema 1.28

La función coseno denotada por $y = \cos x$ es continua sobre todo su dominio $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.99

La función $h(x) = \sqrt{\cos x}$ puede considerarse como la composición de las funciones con ecuaciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$. Como la función f es continua para $x \geq 0$ y la función g es continua para todo x en $\mathbb{R}$, entonces la función h es continua siempre que $\cos x$ sea mayor o igual a cero, lo que sucede cuando

$$x \in \left[(2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right],\ n \in Z,\ |n| \text{ par.}$$

1.2.7 Algunas propiedades de las funciones continuas

Daremos ahora algunas propiedades de las funciones continuas sobre un intervalo.

Teorema 1.29

Sea f una función continua en c tal que $f(c) \neq 0$. Existe entonces un intervalo $]c-\delta, c+\delta[$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

La interpretación geométrica está a la derecha.

En este caso $f(x) > 0$ para x cercano a c, pues $f(c) > 0$.

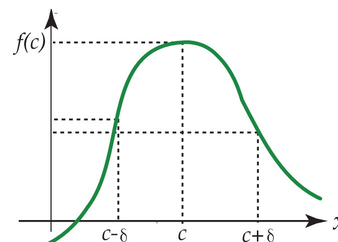


Figura 1.42 Gráfica de $f(x)$

Teorema 1.30 Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en cada punto de un intervalo cerrado $[a,b]$, de donde $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos opuestos. Entonces existe por lo menos un punto $x = c$ en el intervalo abierto $]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Geométricamente puede interpretarse este teorema como sigue:

La gráfica de la función continua con ecuación $y = f(x)$, que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$, donde $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, (o bien $f(a) > 0$, $f(b) < 0$), corta o interseca el eje X en por lo menos un punto, como se representa en las figuras siguientes:

Note que $f(c) = 0$. En este caso $f(c_1) = 0$, $f(c_2) = 0$ y $f(c_3) = 0$.

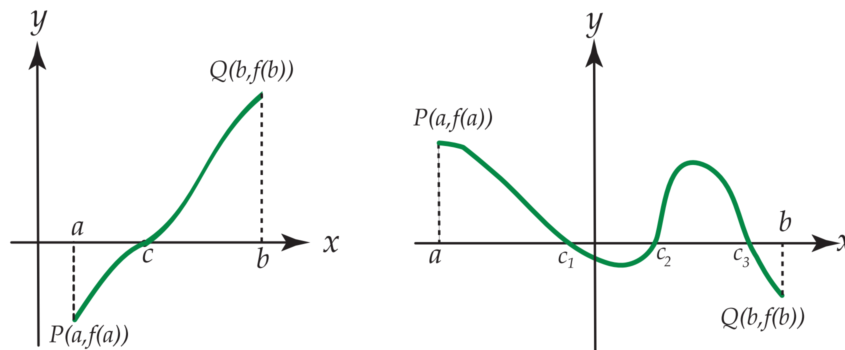


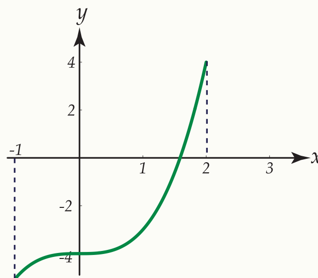
Figura 1.43

Ejemplo 1.100

Consideremos la función f con ecuación $f(x) = x^3 - 4$ en el intervalo $[-1,2]$.

Como $f(-1) = -5$, $(-5 < 0)$, $f(2) = 4$, $(4 > 0)$, entonces existe por lo menos un $x = c$ en $]-1,2[$ tal que $f(c) = 0$.

En este caso $c = \sqrt[3]{4}$. Gráficamente se tiene:

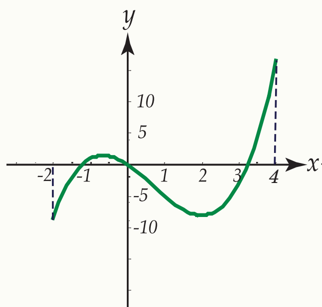


Ejemplo 1.101

Consideremos ahora la función con ecuación $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ en el intervalo $[-2,4]$.

Como $f(-2) = -8$ y $f(4) = 16$, entonces existe por lo menos un valor $x = c$ en el intervalo $]-2,4[$ tal que $f(c) = 0$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



Note que la función interseca al eje X en un valor entre -2 y -1 en $x = 0$, y en un valor entre 3 y 4. Resolviendo $f(x) = 0$ se obtiene que $c_1 = 1 - \sqrt{5}$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1 + \sqrt{5}$.

Teorema 1.31 Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Sea f una función definida y continua en cada punto de un intervalo $[a,b]$. Si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de $[a,b]$ tales que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en el intervalo $]x_1, x_2[$.

Gráficamente se tiene lo siguiente:
En otras palabras, si en los extremos del segmento dado la función toma valores diferentes $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$,

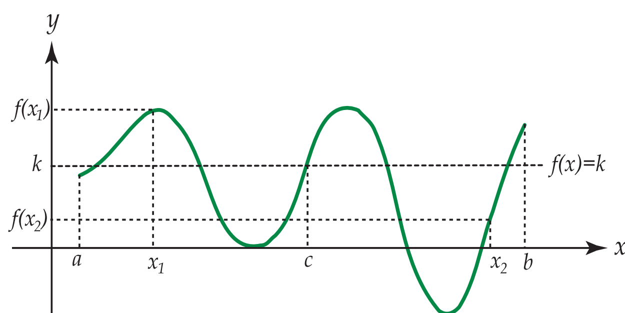
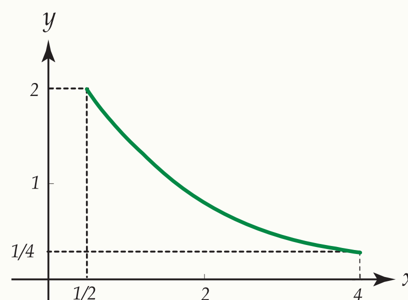


Figura 1.44 Gráfica de $f(x)$

siempre se encontrará un punto $x = C$, comprendido entre x_1 y x_2, tal que $f(c) = k$, cualquiera que sea el número k entre los valores A y B.

Ejemplo 1.102

Consideremos la función f con ecuación $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, cuya representación gráfica está a la derecha.



En este caso $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ y $f(4) = \frac{1}{4}$ (obviamente $2 \neq \frac{1}{4}$)

Entonces, según el teorema 1.31, siempre se encontrará algún valor entre $\frac{1}{2}$ y 4 cuya imagen esté comprendida en 2 y $\frac{1}{4}$.

Si $f(x) = 1$ existe $x = 1$, $\left(1 \in \left]\frac{1}{2}, 4\right[\right)$ tal que $f(1) = 1$.

Si $f(x) = \frac{3}{2}$ existe $x = c$, $\left(c \in \left]\frac{1}{2}, 4\right[\right)$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$; en este caso $c = \frac{2}{3}$.

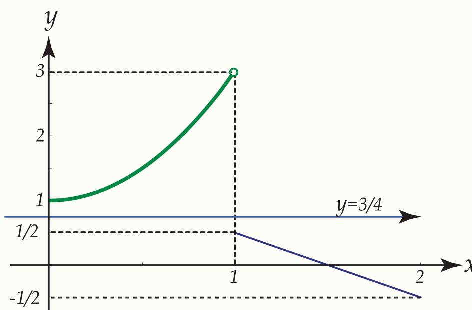
Es necesario hacer notar que el Teorema del Valor Intermedio es válido únicamente cuando la función es continua en un intervalo dado.

En caso de que la función sea discontinua, el teorema no siempre se cumple.

Ejemplo 1.103

Consideremos la función g en el intervalo $[0,2]$ definida por $g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & si \quad x \in [0,1[\\ -x + \frac{3}{2} & si \quad x \in [1,2] \end{cases}$

La representación gráfica es la siguiente:



Ejemplo 1.103 (continuación).

Note que la función es discontinua en el intervalo $[0,2]$, pues en $x = 1$, el $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe. Se tiene que $f(0) = 1$ y que $f(2) = -\frac{1}{2}$.

Si se toma un valor k entre $\frac{1}{2}$ y $1, \left(\frac{1}{2} < k < 1\right)$, no existe ningún valor c entre 0 y 2, tal que $f(c) = k$, pues la función nunca toma valores entre $\frac{1}{2}$ y 1. Si se trazara una recta con ecuación $y = \frac{3}{4}$, ésta nunca intersecaría a la curva.

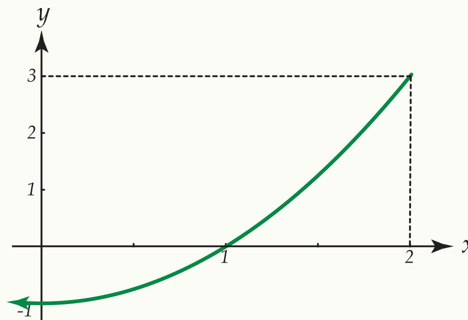
De aquí que la condición de continuidad en el intervalo es indispensable para que se cumpla el teorema.

1.2.8 Continuidad y funciones

Antes de establecer las relaciones entre las funciones inversas y los teoremas sobre continuidad, daremos las siguientes definiciones.

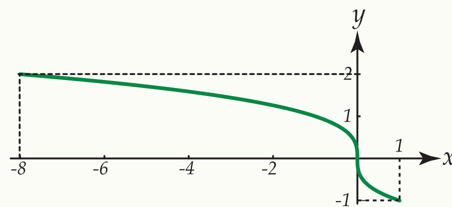
Ejemplo 1.104

La función con ecuación $f(x) = x^2 - 1$ es estrictamente creciente en el intervalo de $[0,2]$, como se muestra en la gráfica siguiente:



Ejemplo 1.105

La función con ecuación $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ es decreciente en el intervalo $[-8,1]$ como se muestra en la figura siguiente:



Definición 1.11 Función estrictamente creciente o estrictamente decreciente

Se dice que una función f definida en un intervalo $[a,b]$ es estrictamente creciente, si para cada $x_1 \in [a,b]$, $x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.

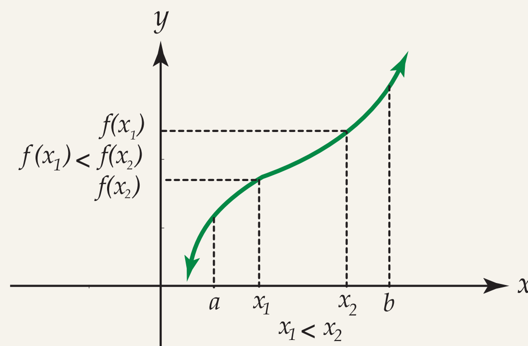


Figura 1.45

Similarmente, una función f es estrictamente decreciente si $x_1 < x_2$ pero $f(x_1) > f(x_2)$.

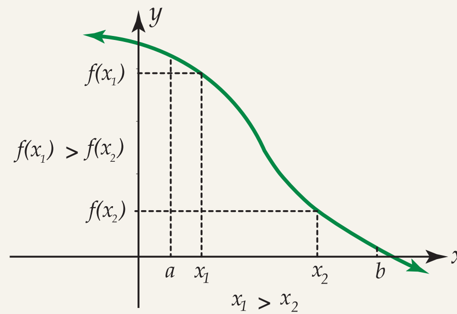
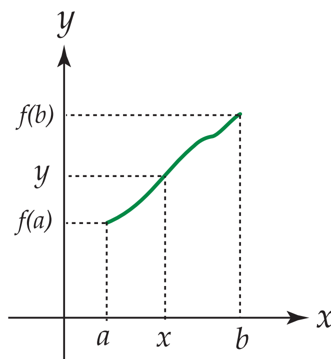


Figura 1.46

Consideremos ahora la gráfica de una función f, denotada por $y = f(x)$, que es continua y estrictamente creciente en un intervalo $[a,b]$:



Según el teorema del Valor Intermedio, si "y" está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un $x \in [a,b]$ tal que $y = f(x)$. En este caso, como f es una función estrictamente creciente, si $y \in [f(a), f(b)]$, existe un

único valor $x \in [a,b]$ tal que $y = f(x)$.

Podría establecerse una nueva función g que tomara a "y" como la variable independiente, de tal forma que x sea igual a $g(y)$. Esta nueva función g recibe el nombre de función inversa de la función f y se denota por f^{-1}.

Definición 1.12 Función inversa

Sea f una función determinada por $\{(x,y)/y = f(x)\}$. Si existe una función f^{-1} tal que $x = f^{-1}(y)$ si y solo si $y = f(x)$, entonces f^{-1} recibe el nombre de función inversa y está determinada por $\{(y,x)/x = f^{-1}(y)\}$. El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f. Así:

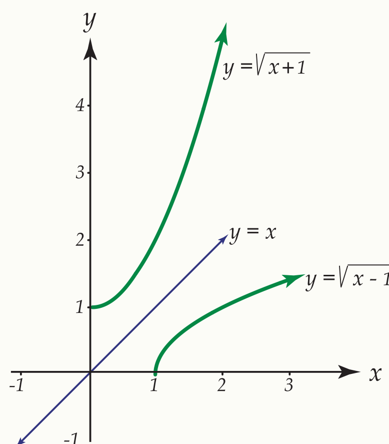
$$f : [a,b] \to [f(a), f(b)],\ y = f(x).$$
$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b],\ x = f^{-1}(y).$$

Ejemplo 1.106

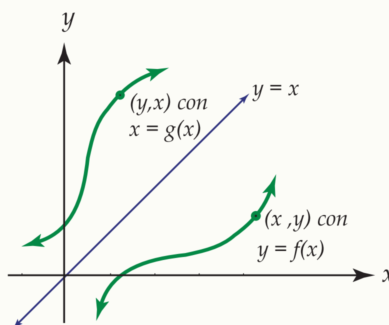
La función $f : [0,+\infty[\to [1,+\infty[,\ f(x) = x^2 + 1$ tiene como función inversa, la función definida por:

$f^{-1} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[, f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

La representación gráfica de ambas funciones es la siguiente:



Note que una función y su inversa son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad.



1.2.9 Propiedades de las funciones inversas

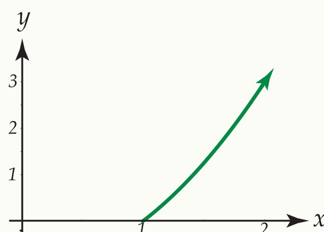
Teorema 1.32

Si una función f es continua y estrictamente creciente en un intervalo $[a,b]$, entonces:

1. Existe la función inversa f^{-1} en el intervalo $[f(a), f(b)]$.
2. f^{-1} es estrictamente creciente en $[f(a), f(b)]$.
3. f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.

Ejemplo 1.107

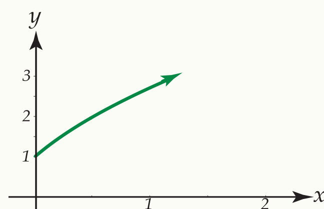
Sea f la función definida por: $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[, \ f(x) = x^2 - 1$.
Su representación gráfica es la siguiente:



Se observa que f es continua y estrictamente creciente en $[1, +\infty[$. Luego, según el teorema existe una función inversa f^{-1} que también es continua y estrictamente creciente.

Dicha función está definida de la manera siguiente: $f^{-1} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[, \ f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.

Su representación gráfica es la siguiente:



Teorema 1.33

Si una función f es continua y estrictamente decreciente en un intervalo $[a,b]$ entonces:

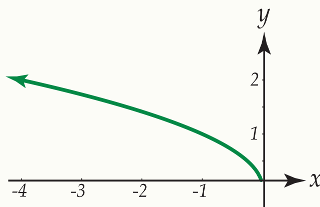
1. f posee una función inversa denotada f^{-1}, definida en $[f(a), f(b)]$.
2. f^{-1} es decreciente en $[f(a), f(b)]$.
3. f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.

Ejemplo 1.108

Consideremos la función f definida como sigue:

$f :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[,\ f(x) = \sqrt{-x}.$

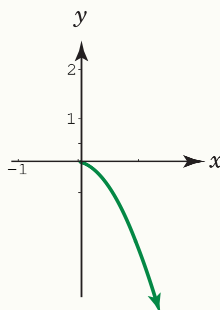
Su representación gráfica es la siguiente:



La función f es continua y estrictamente decreciente por lo que posee función inversa que también es continua y estrictamente decreciente. Dicha función está definida por:

$f^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0],\ f^{-1}(x) = -x^2.$

Su representación gráfica es la siguiente:



EJERCICIOS

1.38 Sea f la función definida por $f : [-3, 0] \to [-8, 1],\ f(x) = -(x+2)^3$. Represente gráficamente esta función.

Si f cumple las condiciones del teorema 1.1 o del teorema 1.2, determine f^{-1} y haga la respectiva representación gráfica.

1.39 Proceda en forma similar a lo enunciado en el punto anterior para

$$f : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\to [0, +\infty[$$
$$x \to f(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

Nota: Los teoremas 1.1 y 1.2 enunciados anteriormente, serán de gran utilidad cuando estudiamos las funciones trigonométricas inversas y sus derivadas en el próximo capítulo.

1.2.10 Valores máximos y mínimos para funciones continuas

Definición 1.13 Máximo absoluto y mínimo absoluto

Sea f una función real de variable real definida en un conjunto U de números reales.

a. Se dice que la función f posee un máximo absoluto en el conjunto U, si existe por lo menos un valor c en U tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in U$. El número $f(c)$ recibe el nombre de máximo absoluto en f en U.

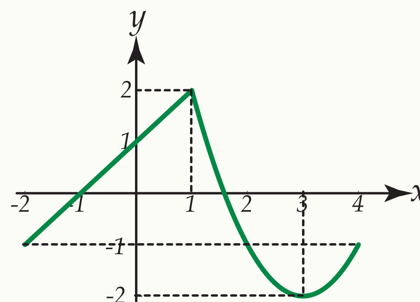
b. Se dice que f posee un mínimo absoluto en U si existe un valor d en U tal que $f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in U$.

Ejemplo 1.109

Consideremos la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x<1 \\ x^2-6x+7 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

en el intervalo $[-2,4]$.

Su representación gráfica en este intervalo es la siguiente:

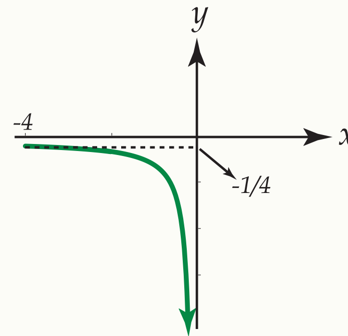


Como $f(x) \leq f(1)$ para todo $x \in [-2,4]$ entonces el máximo absoluto de la función es $f(1) = 2$.

Como $f(x) \geq f(3)$ para todo $x \in [-2,4]$ entonces el mínimo absoluto de la función es $f(3) = -2$.

Ejemplo 1.110

Consideremos la función f definida por $f : [-4,0[\rightarrow \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right]$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
Su representación gráfica está a la derecha.



En este caso $f(x) \leq f(-4)$ para todo $x \in [-4,0[$, por lo que $f(-4) = \frac{-1}{4}$ es el máximo absoluto de f.

Sin embargo, esta función no posee un mínimo absoluto.

Note que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Teorema 1.34 Teorema de acotación para funciones continuas

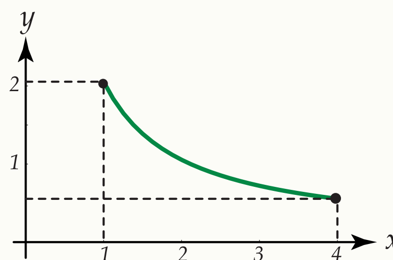
Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces f es acotada en $[a,b]$, es decir, existe un número $k \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$.

Una demostración de este teorema aparece en el libro "Calculus" de Tom M. Apostol.

Ejemplo 1.111

Sea f una función definida por $f : [1,4] \rightarrow [1,2]$, $f(x) = \frac{2}{x}$.

Su representación gráfica es la siguiente:



Se observa que f es continua para todo $x \in [1,4]$.

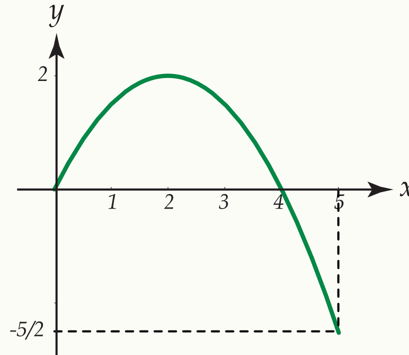
Note que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$ lo que puede escribirse como $-2 \leq \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$, de donde $-2 \leq f(x) \leq 2$.

Luego $\left|\frac{2}{x}\right| \leq 2$ para $x \in [1,4]$ por lo que f es acotada en $[1,4]$.

Ejemplo 1.112

Considere la función definida por: $f : [0,5[\longrightarrow \left[-\frac{5}{2}, 2\right], \ f(x) = 2 - \frac{(x-2)^2}{2}$.

Su representación gráfica es la siguiente:



Se observa que f es continua para todo $x \in [0,5]$.

Se tiene que $\frac{-5}{2} \leq f(x) \leq 2$ para $x \in [0,5]$, por lo que $\frac{-5}{2} \leq f(x) \leq 2 \leq \frac{5}{2}$ de donde $\frac{-5}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ y por tanto $|f(x)| \leq \frac{5}{2}$ para $x \in [0,5]$.

Luego f es acotada en $[0,5]$.

Si una función f es acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el conjunto de todos los valores de $f(x)$ está acotado tanto superior como inferiormente.

Luego, este conjunto posee un extremo superior y un extremo inferior denotados por $\sup f$ e $\inf f$ respectivamente. Se escribe entonces:

$\sup f = \sup\{f(x)/a \leq x \leq b\}$

$\inf f = \inf\{f(x)/a \leq x \leq b\}$

El $\sup f$ es el mayor de los $f(x)$ para $x \in [a,b]$.

El $\inf f$ es el menor de los $f(x)$ para $x \in [a,b]$.

Para cualquier función acotada se tiene que $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ para todo $x \in [a,b]$.

En el ejemplo inmediato anterior se tiene que el $\sup f$ es 2, y que el $\inf f$ es $\frac{-5}{2} \left(\frac{-5}{2} \leq f(x) \leq 2\right)$.

Teorema 1.35 Teorema del máximo (mínimo) para funciones continuas

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe puntos c y d en $[a,b]$ tales que $f(c) = \sup f$ y $f(d) = \inf f$.

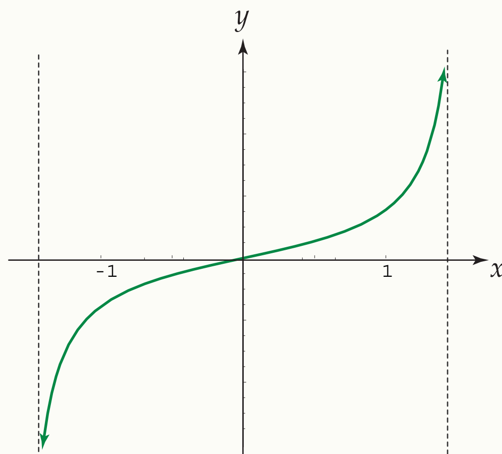
Según el teorema, podemos decir que si f es continua en $[a,b]$ entonces el $\sup f$ es su máximo absoluto, y el $\inf f$ es su mínimo absoluto. Luego, por el teorema del valor medio, los valores que toma f estarán en el intervalo $[\inf f, \sup f]$.

Es indispensable que el intervalo sea cerrado, pues de no serlo, puede ocurrir que aunque una función sea continua en un intervalo abierto, no alcance en él ni su valor máximo ni su valor mínimo.

Ejemplo 1.113

Sea f la función definida por $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x.$

Su representación gráfica es la siguiente:

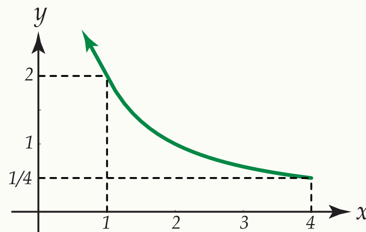


Observe que aunque f es continua en $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ no posee ni máximo ni mínimo absoluto, o sea no tiene ni $\inf f$ ni $\sup f$.

Ejemplo 1.114

Sea f la función definida por $f :]0,4] \longrightarrow \left[\frac{1}{4}, \infty\right[, \ f(x) = \frac{1}{x}$

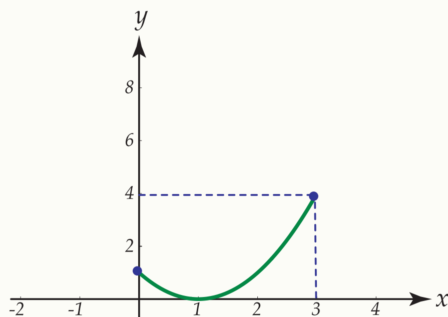
En la gráfica siguiente puede apreciarse que $f(x) \geq \frac{1}{4}$ para $x \in]0,4]$, por lo que $\inf f = \frac{1}{4}$. Sin embargo f no posee un valor máximo absoluto.



Ejemplo 1.115

Sea f la función definida por $f : [0,3] \to [0,4]$, $f(x) = (x-1)^2$.

Su representación gráfica es la siguiente:



En este caso, el intervalo en el que está definida la función f sí es cerrado. Note que $f(3) > f(x)$ para $x \in [0,3]$ por lo que existe $c = 3$ en $[0,3]$ tal que $f(3) = \sup f$. Además $f(1) > f(x)$ para $x \in [0,3]$, por lo que existe $d = 1$ en $[0,3]$ tal que
$f(1) = \inf f$.

Se tiene entonces que $\sup f$ es el máximo absoluto de la función y el $\inf f$ corresponde a su mínimo absoluto.

2 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

2.1 Introducción

El problema de la tangente

"Muchos de los problemas importantes del análisis matemático pueden transferirse o hacerse depender de un problema básico que ha sido de interés para los matemáticos desde los griegos (alrededor de $300 - 200$ a.C). Es éste el problema de trazar una recta tangente a una curva dada en un punto específico a ella.

Este problema fue resuelto por métodos especiales en un gran número de ejemplos aislados aún en la temprana historia de las matemáticas. Por ejemplo, es bastante fácil resolver el problema si la curva es un círculo, y todo estudiante ha visto esta solución en su geometría de secundaria. Sin embargo, no fue si no hasta el tiempo de Isacc Newton($1642 - 1727$) y de Gottfried Wilhelm Leibniz ($1646 - 1716$) que se dio un método general sistemático para obtener la solución. En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del cálculo.

Aunque el problema de la tangente pueda parecer de poco interés a los no matemáticos, el hecho es que las ténicas desarrolladas para resolver el problema son la mera columna vertebral de gran parte de la ciencia y la tecnología actuales. Por ejemplo, la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cada instante se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria de movimiento. Las órbitas de los planetas al rededor del sol y las de los satélites artificiales alrededor de la Tierra, se estudian esencialmente comenzando con la información sobre la recta tangente a la trayectoria del movimiento. Un tipo diferente de problemas es el de estudiar la descomposición de una sustancia radioactiva tal como el radio cuando se conoce que la razón de descomposición en cada instante es proporcional a la cantidad de radio presente. La clave de este problema así como la del problema del movimiento, está en un análisis de lo que queremos designar con la palabra razón.

Como pronto veremos, este concepto está tan íntimamente relacionado con la pendiente de la recta tangente a una curva, que la formulación matemática abstracta de un problema sobre razones es indistinguible de la formulación del problema de la tangente.

Empezamos con el problema de la tangente no solo por su importancia histórica y práctica, sino también porque la intuición geométrica del lector contribuirá a hacer concreta la que, de otro modo, sería una noción abstracta"(Britton, 1968, 323).

Definición 2.1

Recibe el nombre de recta secante cualquier recta que pase por dos puntos diferentes de una curva.

En la siguiente figura se ha representado gráficamente una recta L secante a una curva:

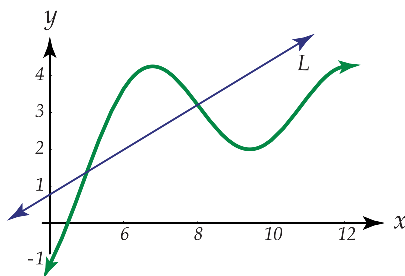


Figura 2.1 Recta secante a una curva

Como al conocer la pendiente de una recta y un punto de ella, la recta queda completamente determinada, se tiene que el problema de trazar una recta tangente a una curva dada, por un punto de ésta, se reduce a encontrar la pendiente de la recta.

Consideremos la representación gráfica de una curva con ecuación $y = f(x)$, donde f es una función continua.

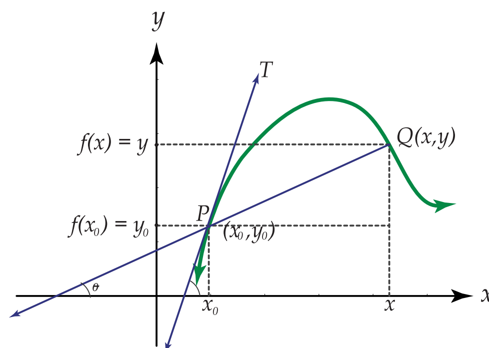


Figura 2.2 Gráfica de $f(x)$

Se desea trazar la recta tangente en un punto $P(x_o, y_o)$ dado de la curva.

Sea PQ la recta secante que pasa por los puntos $P(x_o, y_o)$ y $Q(x, y)$ de la curva.

La pendiente de esta secante, denotada m_S está dada por: $m_s = \dfrac{y - y_o}{x - x_o} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

Como la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje X, y como θ es ese ángulo para la recta secante, entonces:

$$m_S = \tan\theta = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$$

Supongamos que existe una recta tangente a la curva en $P(x_o, y_o)$. Sea PT dicha recta.

Mantenemos ahora el punto P fijo y hacemos que el punto Q se aproxime a P, a lo largo de la curva. Cuando esto sucede, la inclinación θ de la recta secante se aproxima a la inclinación de α de la recta tangente, lo que puede

escribirse como $\lim_{Q \to P} \theta = \alpha$.

En igual forma, la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente, es decir, $\lim_{Q \to P} \tan\theta = \tan\alpha$.

Además, cuando Q tiende hacia P, la abscisa x tiende hacia x_o por lo que $\lim_{Q \to P} \tan\theta = \tan\alpha$ puede escribirse como $\lim_{x \to x_o} \tan\theta = \tan\alpha$.

Luego $\lim_{x \to x_o} \tan\theta = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o} = \tan\alpha$.

Si denotamos por $m_t(x_o)$ la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x_o, y_o)$, entonces $m_t(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o}$.

Definición 2.2

La pendiente de la recta tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto (x_o, y_o), denotada $m_t(x_o)$ es igual al $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que este límite exista.

Ejemplo 2.1

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1, -2)$.

Solución: La ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$. Utilizando la definición 2.2 vamos a averiguar la pendiente en $(1, -2)$.

Así:

$$m_T(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$$

Luego $m_T(1) = -1$, por lo que $y = -x + b$. Para averiguar b, sustituimos el punto $(1, -2)$ como sigue: $-2 = -(1) + b$ de donde $b = -1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -x - 1$.

La representación gráfica de la curva y de la recta tangente es el siguiente:

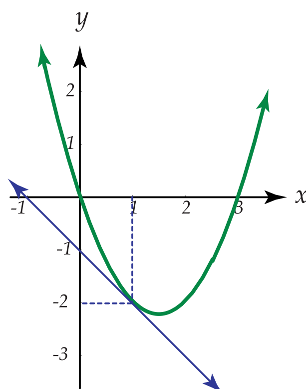


Figura 2.3 Recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1, -2)$

Definición 2.3

Se dice que la recta normal a una curva en el punto $P(x_o, y_o)$, es la línea que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Además, recuerde que dos líneas no verticales son perpendiculares entre sí, si y solo si sus pendientes tienen valores recíprocos negativos.

Si m_T es la pendiente de la recta tangente y m_N la de la recta normal, entonces:

$$m_N = \frac{-1}{m_T} \qquad (m_T . m_N = -1)$$

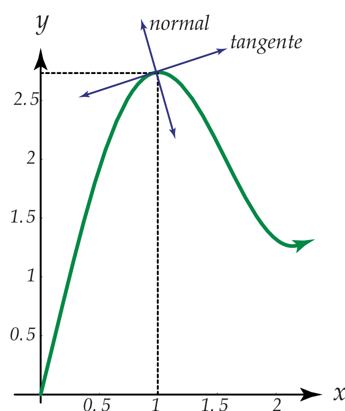


Figura 2.4 Recta normal y tangente

Ejemplo 2.2

Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = \frac{4}{x}$ $, x > 0$, en el punto $(2,2)$.

Solución: Como $m_N = \frac{-1}{m_T}$, averiguamos primero la pendiente de la recta tangente. Así:

$$\begin{aligned}
m_T(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{4}{x}-\frac{4}{2}}{x-2} \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8-4x}{2x}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{x(x-2)} \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{x(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)}{x(x-2)} \quad = \quad \lim_{x\to 2} \frac{-2}{x} = -1
\end{aligned}$$

Como $m_T(2) = -1$, entonces $m_N(2) = 1$.

La ecuación de la recta normal es: $y = 1x + b$. Sustituyendo en la ecuación anterior $x = 2, y = 2$ se obtiene $b = 0$.

Por tanto, la ecuación de la recta normal es $y = x$.

La representación gráfica de la curva y la recta normal es la siguiente:

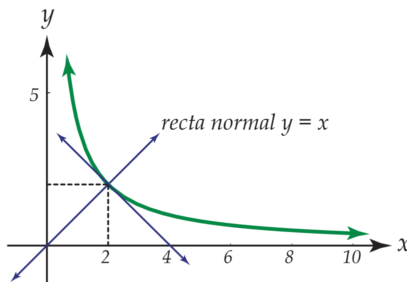


Figura 2.5 Recta normal a $f(x) = \frac{4}{x}$ en (2,2)

La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$.

EJERCICIOS

2.1 Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = 2x^2 - 5$, en el punto $(1,-3)$.

Ejemplo 2.3

Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola con ecuación $y = x^2$, y que es paralela a la recta con ecuación $y = 4x$.

Solución: Recuerde que si dos rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales.

Note que en este caso no nos indican el punto de tangencia en la curva.

Como la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x$, entonces $m_T(x_o) = 4$.

Calculemos $m_T(x_o)$:

$$\begin{aligned} m_T(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \\ &= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} \\ &= \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o} \\ &= \lim_{x \to x_o} (x + x_o) \\ &= x_o + x_o = 2x_o \end{aligned}$$

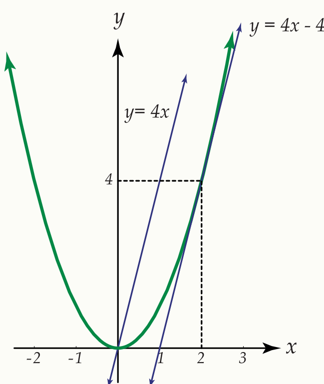
Como $m_T(x_o) = 2x_o$ se tiene que $2x_o = 4$ y por tanto $x_o = 2$.

Si $x_o = 2$ entonces $y_o = 2^2 = 4$. El punto de tangencia es $P(2,4)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = 4x + b$.

Sustituimos $(2,4)$ y se obtiene que $b = -4$.

Entonces la ecuación de la recta tangente es $y = 4x - 4$.



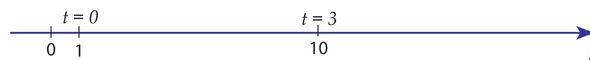
Estudiaremos ahora un segundo problema que involucra un límite similar al utilizado al determinar pendiente de una recta tangente a una curva.

Dicho problema es el de determinar la velocidad de una partícula en un instante de tiempo t_o.

Recibe el nombre de movimiento rectilíneo el efectuado por una partícula a lo largo de una línea recta.

Sea s la función con ecuación $s(t) = t^2 + 1$, que describe la distancia dirigida de la partícula a un punto fijo O, en cualquier tiempo t, (s se mide en metros y t en segundos).

Cuando $t = 0$, la partícula se encuentra a 1 metro de O y cuando $t = 3$ segundos la partícula está a 10 metros de O, como se representa a continuación:



La velocidad promedio de la partícula es la razón del cambio en la distancia dirigida desde un punto fijo, al cambio en el tiempo.

En este caso, en el lapso de tres segundos, la velocidad media, denotada v_{med}, está dada por $v_{med} = \frac{10-1}{3-0} = 3$ metros por segundo.

Note que la velocidad promedio de la partícula no es constante, y que además ésta no proporciona información específica referente al movimiento de la partícula en cualquier instante determinado.

Para el movimiento anterior, la velocidad media desde $t = 3$ segundos hasta otro tiempo t cualquiera, está dada por:

$$v_{med} = \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \frac{s(t) - 10}{t - 3}$$

Si quisiéramos determinar la velocidad al final de 3 segundos, es decir la velocidad instantánea cuando $t = 3$ no podríamos averiguarla con la fórmula anterior, pues si se sustituye $t = 3$ el denominador se hace cero.

Sin embargo, cuanto más corto sea el intervalo de t a $t = 3$ seg, la velocidad promedio estará más cerca de lo que intuitivamente se consideraría como la velocidad instantánea en $t = 3$ seg.

Surge así la siguiente definición sobre la velocidad instantánea:

Definición 2.4

Si una partícula se mueve sobre una línea recta de tal forma que su distancia dirigida s, a un punto fijo de la recta está dada en función del tiempo por la ecuación $s = s(t)$, entonces la velocidad en cualquier instante t_1 es:

$$v(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}, \quad \text{siempre que este límite exista}$$

Ejemplo 2.3 (continuación).

Si $s(t) = t^2 + 1$ describe la distancia dirigida de la partícula a un punto fijo O, en cualquier tiempo t entonces, utilizando la definición 2.4, se puede averiguar la velocidad en el instante $t = 3$ seg, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(3) &= \lim_{t\to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} \frac{t^2 + 1 - 10}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} \frac{t^2 - 9}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} \frac{(t-3)(t+3)}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} (t+3) = 6 \end{aligned}$$

Luego, la velocidad cuando $t = 3$ seg es de 6 metros por segundo.

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, según la partícula se mueva a lo largo de la recta en dirección positiva o negativa; es cero cuando la partícula está en reposo.

La rapidez de la partícula en un instante de tiempo t, se define como $|v(t_1)|$, siendo simplemente la magnitud de la velocidad, es decir, su valor absoluto, por lo que será siempre positiva o nula.

La aceleración es una medida de la variación de la velocidad. La aceleración es cero si una partícula se mueve sobre una recta con velocidad constante.

Si la velocidad v de la partícula está dada por la ecuación $v = v(t)$, donde t es el tiempo, entonces la aceleración en el instante $t = t_1$, se define como el límite de la aceleración media de la siguiente forma:

$$a(t_1) = \lim_{t\to t_1} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1}$$

Observe la semejanza con la definición 2.4 (velocidad instantánea) como límite de la velocidad media.

Ejemplo 2.4

La ecuación $s(t) = t^2 + 2t$ describe el movimiento de una partícula sobre una recta. La distancia al origen está en metros y t está en segundos. Calcular la velocidad cuando $t = 3$ seg.

Solución: Se debe determinar la velocidad instantánea cuando $t = 3$ seg

$$\begin{aligned} v(3) &= \lim_{t\to 3} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} \frac{t^2+2t-15}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} \frac{(t-3)(t+5)}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3} (t+5) = 8 \ \text{ metros por segundo.} \end{aligned}$$

Así, cuando $t = 3$ seg, la velocidad de la partícula es de 8 metros por segundo.

Ejemplo 2.5

Una partícula P se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación $s(t) = 15t - 3t^2$, donde s, en metros, es la distancia al punto de partida en el tiempo t, (en segundos). Determinar la distancia de P al punto de partida cuando la velocidad es nula.

Solución: Debemos averiguar primero la velocidad de la partícula en cualquier instante t_o.

$$v(t_o) = \lim_{t\to t_o} \frac{s(t)-s(t_o)}{t-t_o}$$

$$= \lim_{t\to t_o} \frac{15t-3t^2-(15t_o-3t_o^2)}{t-t_o}$$

$$= \lim_{t\to t_o} \frac{15t-15t_o-3t^2+3t_o^2}{t-t_o}$$

$$= \lim_{t\to t_o} \frac{15(t-t_o)-3(t^2-t_o^2)}{t-t_o}$$

$$= \lim_{t\to t_o} \frac{15(t-t_o)-3(t-t_o)(t+t_o)}{t-t_o}$$

$$= \lim_{t\to t_o} \frac{(t-t_o)(15-3t-3t_o)}{t-t_o}$$

$$= \lim_{t\to t_o} (15-3t-3t_o) = 15-6t_o \ = \ 15-6t_o \ \text{ metros por segundo.}$$

Ejemplo 2.5 (continuación).

Ahora averiguaremos el valor de t_o para el que la velocidad se hace cero:

$v(t_o) = 0 \iff 15 - t_o = 0 \iff t_o = \frac{5}{2}$ segundos

Por último, calculemos la distancia que ha recorrido la partícula al cabo de $t_o = \dfrac{5}{2}$ segundos.

$$s\left(\frac{5}{2}\right) = 15\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} = 18{,}75 \text{ metros.}$$

EJERCICIOS

2.2 Dos partículas p_1 y p_2 parten de un mismo punto en una recta y se mueven a lo largo de ella según las ecuaciones $s_1(t) = t^2 - 4t$, y, $s_2(t) = 3t - t^2$, donde s_1 y s_2 están en metros, y t en segundos.

a) ¿ En qué tiempos tendrán las dos partículas la misma velocidad?

b) Determine las velocidades de las partículas en los tiempos en que están en la misma posición sobre la recta.

2.2 La derivada de una función

En la resolución de los dos problemas anteriores: el de trazar una recta tangente a una curva dada y el de determinar la velocidad instantánea de una cierta partícula, se obtuvo como resultado dos límites:

$$m_T(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \; v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

Ambos límites tienen básicamente la misma forma y son casos específicos de un tipo especial de límite que se define a continuación.

Definición 2.5 Derivada de una función

Sea f una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sea $x_o \in I$

La derivada de f en el punto x_o, denotada $f'(x_o)$, es el $\displaystyle\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ si este límite existe.

Note que, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_o, f(x_o))$, es precisamente la derivada de f evaluada en x_o.

También, si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, puede observarse que $v(t_1)$ en la definición 2.4 de la partícula en t_1, es la derivada de f respecto a t, evaluada en t_1.

Si en la definición 2.5 se sustituye $x - x_o$ por h, entonces $h \to 0$ cuando $x \to x_o$ y $x = x_o + h$.

Luego $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$, si este límite existe. La función f es derivable en x_o si $f'(x_o)$ existe.

Si $f'(x)$ existe para cada x en un intervalo I, $(I \subset \mathbb{R})$, se dice que la función f es derivable en I; se escribe $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Ejemplo 2.6

Utilizando la definición 2.2 (derivada de una función), determinar la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(x) = 5x - 3$

   Se debe calcular el $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

   La expresión $f(x+h)$ indica que la función f debe evaluarse en $(x+h)$. Así, $f(x+h) = 5(x+h) - 3$.

   Luego:

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - 3 - (5x - 3)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 3 - 5x + 3}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} 5 = 5$$

   Por tanto, si $f(x) = 5x - 3$ entonces $f'(x) = 5$.

2. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}, x \neq 0$

   En este caso $f(x+h) = \dfrac{3}{(x+h)^2}$

   Luego:

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{(x+h)^2} - \frac{3}{x^2}}{h}$$

Ejemplo 2.6 (continuación).

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3x^2 - 3(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3x^2 - 3x^2 - 6xh - 3h^2}{hx^2(x+h)^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$

$= \dfrac{-6x}{x^2 \cdot x^2} = \dfrac{-6}{x^3}$

Si $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ entonces $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$.

3. $g(u) = (2u+1)^2$

En este caso $g(u+h) = [2(u+h)+1]^2$

Luego:

$g'(u) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(u+h) - g(u)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[2(u+h)+1]^2 - (2u+1)^2}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[2(u+h)+1+(2u+1)][2(u+h)+1-(2u+1)]}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2u+2h+1+2u+1)(2u+2h+1-2u-1)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(4u+2h+2)(2h)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} 2(4u+2h+2)$

$g'(u) = 2(4u+0+2) = 8u+4$

Si $g(u) = (2u+1)^2$ entonces $g'(u) = 8u+4$.

EJERCICIOS

2.3 Determine, utilizando la definición 2.5, la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $f(t) = \sqrt{t+1}$, $t > -1$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

c) $g(y) = \dfrac{3y}{y+2}$, $y \neq -2$

2.3 Notaciones para la derivada de una función

Si f es una función derivable en un intervalo I, $(I \subset \mathbb{R})$, el proceso por medio del cual se obtiene $f'(x)$, da origen a una nueva función que recibe el nombre de función derivada.

El dominio de $f'(x)$ está formado por todos los números del dominio de f para los que exista $f'(x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ está definida únicamente para $x > 0$.

Si $y = f(x)$, con f una función derivable, entonces la derivada de f puede denotarse por:

1. $D_x f(x)$ que se lee: derivada de $f(x)$ respecto a x.
2. $D_x y$ que se lee: derivada de "y" respecto a x.
3. y' que se lee: "y prima".

2.4 Continuidad y derivabilidad

En el capítulo anterior se estudiaron las condiciones para que una función fuera continua en un punto. También se determinó la continuidad en un intervalo, que puede asociarse con la representación gráfica de una curva que no tiene "brincos" o "saltos bruscos".

Vamos ahora a relacionar la continuidad con la derivabilidad de una función f en un punto x_o, por medio del siguiente teorema.

Teorema 2.1

Si una función f es derivable en un punto x_o, entonces f es continua en x_o.

Prueba: (Al final del capítulo).

El recíproco del teorema 2.1 no es cierto. Es decir, el hecho de que una función sea continua en un punto no implica que sea derivable en él.

Antes de estudiar algunos ejemplos, necesitamos conocer las siguientes definiciones sobre derivadas laterales.

Definición 2.6

Si f es una función continua definida en $x = x_o$, entonces:

1. La derivada por la derecha, que se denota $f'_+(x_o)$, se define por la igualdad: $f'_+(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o^+} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que el límite exista.

2. La derivada por la izquierda, denotada $f'_-(x_o)$, se define por la igualdad: $f'_-(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que el límite exista.

Como consecuencia de la definición 2.6, se tiene que $f'(x_o)$ existe si y solo si existen las derivadas laterales y ambas son iguales.

Así: $f'(x_o)$ existe $\iff$ $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$

Ejemplo 2.7

Consideremos la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x+3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Vamos a determinar si f es continua en 1 y si $f'(1)$ existe.

Para lo primero tenemos que:

a. $f(1)$ existe pues $f(1) = -1 + 3 = 2$

b. Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x+3) = 2$, y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2$ entonces $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Luego f es continua en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Para lo segundo determinaremos las derivadas laterales.

Ejemplo 2.7 (continuación).

a. $f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{-x+3-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} -1 = -1.$

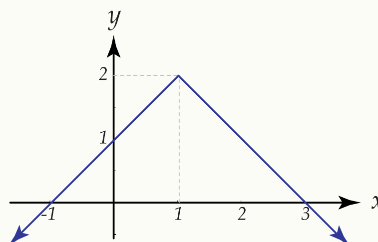
b. $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{x-1} = 1.$

Como $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ entonces $f'(1)$ no existe.

Luego, se ha comprobado que aunque f es continua en $x=1$ se tiene que f no es derivable en $x=1$.

La representación gráfica de la función está a la derecha.

Note que en $x=1$ la gráfica de f tiene un "pico", siendo precisamente en $x=1$ donde no es derivable la función.



Ejemplo 2.8

Sea f la función con ecuación: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$

Determinemos si $f'(0)$ existe y si f es continua en $x=0$.

Calculemos las derivadas laterales:

a. $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$

b. $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-x}}{x} . \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x\sqrt{-x}} =$
$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$

Luego $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ por lo que f no es derivable en $x=0$.

Probemos ahora si f es continua en $x=0$:

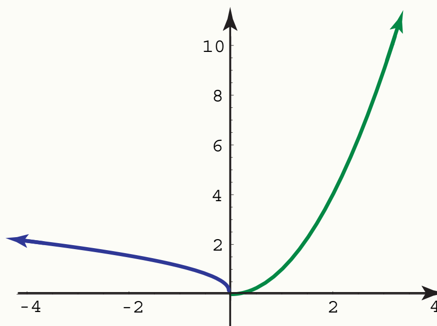
a. $f(0)$ existe pues $f(0)=0$; $f(0)=\sqrt{-0}=\sqrt{0}=0.$

b. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0.$

Ejemplo 2.8 (continuación).

Entonces f es continua pero no es derivable en $x=0$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



Note que la gráfica tiene una tangente vertical en $(0,0)$.

El hecho de que f no sea derivable en cero, está relacionado con el hecho de que una recta vertical no tiene pendiente.

Ejemplo 2.9

Sea f la función con ecuación: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Determinemos si esta función es continua y derivable en $x=2$. Se tiene que $f(2)$ existe pues $f(2)=\sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-4) = 0$

Entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe y además $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, por lo que f es una función continua en $x=2$.

Estudiemos ahora las derivadas laterales:

a. $f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

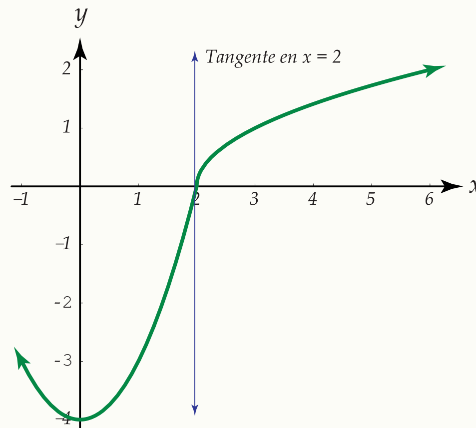
b. $f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4$

Ejemplo 2.9 (continuación).

Como $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ entonces $f'(2)$ no existe.

Nuevamente, aunque una función sea continua en un punto esto no garantiza que sea derivable en él.

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



Note que nuevamente la recta tangente a la curva en $x = 2$ es una línea vertical.

EJERCICIOS

2.4 Para cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad x_o = 0$

2. $f(x) = |x - 3|$, $x_o = 3$

   a) Determine si f es continua en x_o.
   b) Halle $f'_+(x_o)$ y $f'_-(x_o)$.
   c) Determine si f es derivable en x_o.
   d) Haga la representación gráfica.

2.5 Teoremas sobre derivadas

Aunque dada la ecuación de una función es posible obtener su respectiva función derivada utilizando la definición 2.5, para algunas funciones este procedimiento resulta sumamente tedioso. Surge entonces la necesidad de simplificar este proceso, lo cual puede lograrse al estudiar los teoremas sobre derivadas.

Teorema 2.2

La derivada de una función constante es cero.

Ejemplo 2.10

Aplicación del teorema

1. Si $f(x) = 8$ entonces $f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = 5\sqrt{2}$ entonces $f'(x) = 0$.
3. Si $f(x) = \frac{4}{5+\sqrt{2}}$ entonces $f'(x) = 0$.

Teorema 2.3

Si $f(x) = x$ entonces f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y $D_x f(x) = D_x x = 1$.

Ejemplo 2.11

Aplicación del teorema

1. $D_y y = 1$
2. $D_n n = 1$
3. $D_t t = 1$

Teorema 2.4

Si $f(x) = x^n$ con $n \in Q$ y x pertenece al conjunto A en el que x^n está bien definida, entonces f es derivable en A y $D_x x^n = n\, x^{n-1}$.

Ejemplo 2.12

Aplicación del teorema

1. Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.
2. Si $f(x) = x^5$ entonces $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.
3. $D_x\left(x^{-3}\right) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$.
4. $D_x\left(\frac{1}{x^5}\right) = D_x x^{-5} = -5x^{-6}$.
5. $D_x\left(\sqrt{x}\right) = D_x\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $D_x\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
7. $D_x\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) = \dfrac{-1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} = \dfrac{-1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$
8. $D_x\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) = D_x\left(x^{-\frac{3}{4}}\right) = \dfrac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

Teorema 2.5

Si la función f es derivable sobre un intervalo K y c es un número real, entonces la función g para la que $g(x) = c\,f(x)$ es derivable sobre K, además $D_x[c\,f(x)] = c\,D_x f(x)$.

Prueba: (Ejercicio para el estudiante utilizando la definición 2.5).

El teorema 2.5 afirma que la derivada del producto de una constante por una función derivable, es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Ejemplo 2.13

Si $f(x) = 5x$ entonces $f'(x) = 5\,D_x x = 5 \cdot 1 = 5$.

Ejemplo 2.14

Si $f(x) = -2x^3$ entonces $f'(x) = -2\,D_x x^3 = -2(3x^2) = -6x^2$.

Ejemplo 2.15

$$D_x\left(\frac{2}{7}\sqrt{x}\right) = \frac{2}{7}\,D_x\sqrt{x} = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{7\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2.16

$$D_x\left(\frac{-5}{4}x^{-3}\right) = \frac{-5}{4}\cdot -3x^{-4} = \frac{15}{4x^4}.$$

Ejemplo 2.17

$$D_z\left(2z^{\frac{-3}{7}}\right) = 2\left(\frac{-3}{7}\cdot z^{\frac{-10}{7}}\right) = \frac{-6}{7}\cdot z^{\frac{-10}{7}}.$$

Teorema 2.6

Si f y g son dos funciones derivables sobre un intervalo K, entonces la función $h = f + g$ es derivable sobre K y además $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$, para $x \in K$.

Se tiene entonces que la derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones. También:

$D_x[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x)] = D_x f_1(x) + D_x f_2(x) + D_x f_3(x) + ... + D_x f_n(x)$
donde $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones derivables sobre un intervalo K.

Ejemplo 2.18

$$D_x[x^3 + x^7] = D_x x^3 + D_x x^7 = 3x^2 + 7x^6.$$

Ejemplo 2.19

$$D_x[2x^{\frac{7}{2}} + x^{-1}] = D_x 2x^{\frac{7}{2}} + D_x x^{-1} = 2D_x x^{\frac{7}{2}} + D_x x^{-1} = 2\cdot\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - x^{-2} = 7\sqrt{x^5} - \frac{1}{x^2}.$$

Ejemplo 2.20

$$D_x[\sqrt[3]{x}+2x^3+5x]=D_xx^{\frac{1}{3}}+D_x2x^3+D_x5x=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}+2\cdot 3x^2+5\cdot 1=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+6x^2+5.$$

Si f y g son funciones derivables sobre un intervalo K entonces la función $f - g$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ se tiene que

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_xf(x) - D_xg(x).$$

Ejemplo 2.21

$$D_x[5x^2-5]=D_x5x^2-D_x5=10x-0=10x.$$

Ejemplo 2.22

$$D_x\left[\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\sqrt{x}\right]=D_x[3x^{-1}-2x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}]=-3x^{-2}+4x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Teorema 2.7

Si f y g son funciones derivables sobre un intervalo K entonces la función $H = f \cdot g$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x \in K$ se tiene que $D_x[f(x) \cdot g(x)] = f(x)D_xg(x) + g(x)D_xf(x)$.

Puede decirse que la derivada del producto de dos funciones, es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo 2.23

$$D_x[\sqrt[3]{x}(2x^2+x)]=\sqrt[3]{x}D_x(2x^2+x)+(2x^2+x)D_x\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}(4x+1)+(2x^2+x)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ejemplo 2.24

$D_x[(4x^3-5x^2+6)(\sqrt{x}+2x)] = (4x^3-5x^2+6)D_x(\sqrt{x}+2x)+(\sqrt{x}+2x)D_x(4x^3-5x^2+6) =$

$(4x^3-5x^2+6)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2\right)+(\sqrt{x}+2x)(12x^2-10x+0).$

Ejemplo 2.25

$D_x[(ax^3-bx^2+c)(5x^{-3}+kx)]$, con a, b, c, k constantes.

$= (ax^3-bx^2+c)D_x(5x^{-3}+kx)+(5x^{-3}+kx)D_x(ax^3-bx^2+c)$

$= (ax^3-bx^2+c)(-15x^{-4}+k)+(5x^{-3}+kx)(3ax^2-2bx).$

Teorema 2.8

Si f y g son dos funciones derivables y si $g(x)\neq 0$ sobre un intervalo K entonces la función $h=\dfrac{f}{g}$ es derivable sobre K, y además para cualquier $x\in K$ y se tiene que $D_x\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)D_xf(x)\ -\ f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$

Puede decirse que la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Ejemplo 2.26

$$D_x\left(\frac{5x^2-x+1}{x^3+4x^2}\right)$$
$$=\frac{(x^3+4x^2)D_x(5x^2-x+1)-(5x^2-x+1)D_x(x^3+4x^2)}{[x^3+4x^2]^2}$$
$$=\frac{(x^3+4x^2)(10x-1+0)-(5x^2-x+1)(3x^2+8x)}{[x^3+4x^2]^2}$$
$$=\frac{10x^4-x^3+40x^3-4x^2-15x^4-40x^3+3x^3+8x^2-3x^2-8x}{[x^3+4x^2]^2}$$
$$=\frac{-5x^4+2x^3+x^2-8x}{[x^3+4x^2]^2}\quad \text{con } x\neq 0,\ x\neq -4$$

Ejemplo 2.27

$$D_x\left(\frac{\sqrt{x}+5}{4x^2+2}\right)$$
$$= \frac{(4x^2+2)D_x(\sqrt{x}+5)-(\sqrt{x}+5)D_x(4x^2+2)}{[4x^2+2]^2}$$
$$= \frac{(4x^2+2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-(\sqrt{x}+5)(8x)}{[4x^2+2]^2}$$
$$= \frac{2x^2+1-\sqrt{x}\cdot 8x(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2}$$
$$= \frac{2x^2+1-8x(x+5\sqrt{x})}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2}$$
$$= \frac{1-6x^2-40x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(4x^2+2)^2} \quad \text{con } x>0$$

Ejemplo 2.28

$$D_x\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{x}-2}\right) = \frac{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot 2-2x\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)}{(\sqrt[3]{x}-2)^2} = \frac{2\sqrt[3]{x}-4-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[3]{x}-2)^2}$$
$$= \frac{6\sqrt[3]{x}-12-2\sqrt[3]{x}}{3(\sqrt[3]{x}-2)^2} = \frac{4\sqrt[3]{x}-12}{3(\sqrt[3]{x}-2)^2}, \quad \text{con } x \neq 8$$

2.6 Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena)

Si consideramos las ecuaciones $y=u^3$, $u=5x^2+8$ entonces puede escribirse "y" como $y=(5x^2+8)^3$.

En igual forma, si $y=\sqrt{u}$, $u=4x^2+5x+2$ entonces puede expresarse "y" como $y=\sqrt{4x^2+5x+2}$.

En general, si $y=f(u)$, $u=g(x)$ entonces $y=f(g(x))$.

Las ecuaciones anteriores dan en forma explícita las siguientes funciones:

$f=\{(u,y)/\ y=f(u)\}$

$g=\{(x,u)/\ u=g(x)\}$

$h=\{(x,y)/\ y=f(g(x))\}$

La función h para la cual $h=f(g(x))$ recibe el nombre de función compuesta y se escribe $h=(fog)(x)=f(g(x))$.

Observe que los elementos del dominio de h son los x que pertenecen al dominio de la función g, tales que $g(x)$ pertenezca al dominio de f.

Ilustraremos lo anterior con el siguiente diagrama:

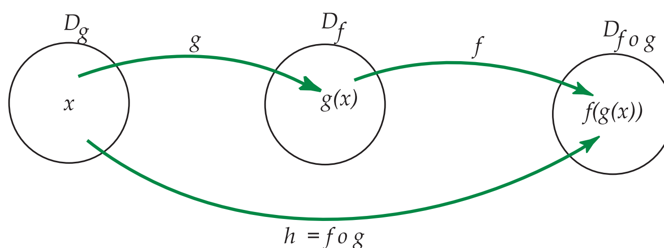


Figura 2.6 Dominio de una función compuesta

Otros ejemplos de funciones compuestas son:

1. $h(x) = \sqrt[3]{6x-4} = f(g(x))$ donde $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = 6x - 4$

2. $h(x) = e^{3x^2+1} = f(g(x))$ donde $f(x) = e^x$ y $g(x) = 3x^2 + 1$

Determinaremos ahora la derivada de una función compuesta.

Teorema 2.9

Si la función $g = \{(x,y)/\ y = g(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si la función $f = \{(u,y)/\ y = f(u)\}$ es derivable sobre un intervalo S_2 tal que $S_2 = \{g(x)/\ x \in S_2\}$, entonces la función compuesta $f(g) = \{(x,y)/\ y = f(g(x))\}$ es derivable sobre S_1 y $D_x[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, para $x \in S_1$.

Esta fórmula recibe el nombre de Regla de la Cadena.

Ejemplo 2.29

$D_x[f(3x^2+1)] = f'(3x^2+1) \cdot D_x(3x^2+1) = f'(3x^2+1) \cdot 6x$

Ejemplo 2.30

$D_x[f(\sqrt{x})] = f'(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ con $x > 0$

Ejemplo 2.31

$D_x[f\left(\frac{2}{x}\right)] = f'\left(\frac{2}{x}\right) \cdot D_x\left(\frac{2}{x}\right) = f'\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \frac{-2}{x^2}$

Corolario 2.1 *Si la función $g = \{(x,u) / \ u = g(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si $[g(x)]^p$ y $[g(x)]^{p-1}$ están definidas para $x \in S_2$ con $S_2 \subseteq S_1$, $(p \in Q)$, entonces la función $g^k = \{(x,y) / \ y = [g(x)]^p\}$ es derivable sobre S_2 y además $D_x[g(x)^p] = p(g(x))^{p-1} \cdot D_x g(x)$, para $x \in S_2$.*

El corolario 2.1 es una aplicación inmediata de la regla de la cadena en la forma $D_x y = D_u y \cdot D_x u$ con $y = u^p$, $u = g(x)$ y $D_u y = p \cdot u^{p-1}$.

Ejemplo 2.32

$D_x(5x+3)^4$

En este caso $u = 5x+3$ por lo que

$D_x[(5x+3)^4]$

$= 4(5x+3)^3 \cdot D_x(5x+3)$

$= 4(5x+3)^3 \cdot 5$

$= 20(5x+3)^3$

Ejemplo 2.33

$D_x[(3x^4+5x^2+4)^{-2}]$

$= -2(3x^4+5x^2+4)^{-3} \cdot D_x(3x^4+5x^2+4)$

$= -2(3x^4+5x^2+4)^{-3} \cdot (12x^3+10x)$

Ejemplo 2.34

$D_x\sqrt{5x^2+4}$

$= D_x(5x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(5x^2+4)^{\frac{-1}{2}}\cdot(10x+0)$

$= \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2+4}}$

Ejemplo 2.35

$D_x\sqrt[4]{6x^4+7x^2}$

$= D_x(6x^4+7x^2)^{\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{1}{4}\cdot(6x^4+7x^2)^{\frac{-3}{4}}\cdot(24x^3+14x)$

$= \dfrac{12x^3+7x}{2\sqrt[4]{(6x^4+7x^2)^3}}$

Ejemplo 2.36

$D_x\sqrt{5x+\sqrt{6x^2+1}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{5x+\sqrt{6x^2+1}}}\cdot\left(5+\dfrac{12x}{2\sqrt{6x^2+1}}\right)$

$\dfrac{1}{2\sqrt{5x+\sqrt{6x^2+1}}}\cdot\left(\dfrac{5\sqrt{6x^2+1}+6x}{\sqrt{6x^2+1}}\right)$

EJERCICIOS

2.5 Determine la derivada de las funciones con ecuaciones:

a) $f(x) = 6x^3+\dfrac{2x}{\sqrt{x^3+1}}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{5x^2+1}{2x}}$

2.7 Diferenciales. Interpretación geométrica

2.7.1 Incrementos

Estudiaremos este punto antes de definir el diferencial y dar su interpretación geométrica.

Al dar la definición de la derivada de una función f como el $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se utilizó h para señalar un número distinto de cero tal que $x+h$ pertenece al dominio de f.

Gráficamente se tiene la representación de f y la recta tangente:

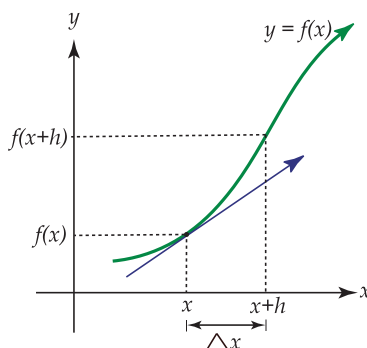


Figura 2.7 Gráfica de $f(x)$ y la recta tangente

Puede decirse que h es la diferencia entre las abscisas de dos puntos de la gráfica de f. Esta diferencia recibe el nombre de incremento de x y se denota por Δx.

Para una función f, dada al sustituir h por Δx en la expresión $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se obtiene $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ de donde $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Si $y=f(x)$ entonces el incremento en "y" correspondiente al incremento Δx de x, que se denota por Δy, está dado por $f(x+\Delta x)-f(x)$.

Así , Δy es el cambio en "y" debido al cambio Δx en x.

La razón $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ recibe el nombre de razón promedio de cambio de f o de "y", respecto a x, para el intervalo $[x, x+\Delta x]$.

La derivada: $D_x y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ recibe el nombre de razón instantánea de cambio o simplemente razón de cambio de "y" o de f respecto a x.

Ejemplo 2.37

Si $y = 2x^2 + 1$ hallar Δy en términos de x y Δx.

i. Determinar Δy para:

   a. $x = 1, \ \Delta x = 0.1$
   b. $x = 10, \ \Delta x = 0.01$

Solución:

$\Delta y = f(x + \Delta x - f(x))$

$= 2(x + \Delta x)^2 + 1 - (2x^2 + 1)$

$= 2(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 1 - 2x^2 - 1$

$= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x^2$

$= (4x + 2\Delta x)\Delta x$

   a. Para $x = 1$, $\Delta x = 0.1$ se tiene que:

      $\Delta y = (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0.1)0.1 = 0.42$

      Puede decirse que existe un incremento de 0.42 en las ordenadas debido a un incremento de 0.1 en las abscisas.

   b. Para $x = 10$ y $x = 0.01$ se tiene que:
      $\Delta y = (4 \cdot 10 + 2 \cdot 0.01)0.01 = 4.002$

ii. Hallar la razón promedio de cambio de "y" respecto a x para el intervalo $[2, 2.5]$ y para el intervalo $[2, 2.01]$.

Solución:

La razón promedio de cambio de "y" respecto a "x" está dada por:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \dfrac{(4x + 2\Delta x)\Delta x}{\Delta x}$ de donde

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$

En el intervalo $[2, 2.5]$ se tiene $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 8 + 2(0.5) = 9$ y el intervalo $[2, 2.01]$ se obtiene $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 8 + 2(0.01) = 8.02$

Ejemplo 2.37 (continuación).

iii. Hallar la razón de cambio de "y" respecto a "x". Determinar el valor de esta razón en 2 y en 4.

Solución:

La razón de cambio de "y" respecto a "x" está dada por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x) = 4x$$

En 2 esta razón instantánea es 8 y en 4 toma el valor de 12.

Ejemplo 2.38

Demostrar que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio, es igual al área de la superficie de la esfera.

Solución:

El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

La razón de cambio del volumen con respecto al radio está dado por:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r^3 + 3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 - r^3}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\Delta r(3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2)}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{4}{3}\pi \cdot [3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2]$$

$$= \frac{4}{3}\pi (3r^2)$$

$= 4\pi r^2$ expresión que corresponde precisamente al área de la superficie de la esfera.

2.7.2 Diferenciales

Sea f una función definida por $y = f(x)$, derivable sobre un intervalo S.

Sea Δx diferente de cero tal que $\Delta x + x$ pertenece al dominio de f y el punto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ esté en la gráfica de f como se muestra en la siguiente figura:

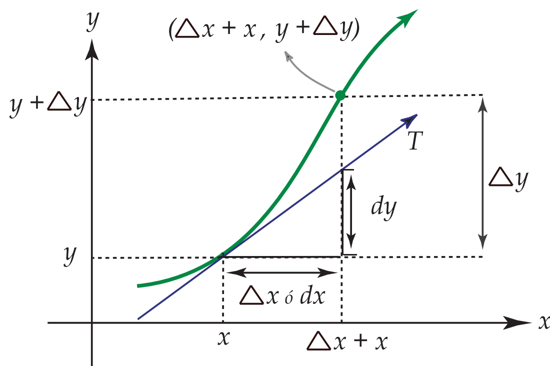


Figura 2.8 Gráfica de $f(x)$

Sabemos de la definición 2.5 que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{si el límite existe}$$

luego:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$$

de donde para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$ siempre que $0 < |\Delta x| < \delta$ o sea, $|\Delta y - f'(x) \cdot \Delta x| < \varepsilon \Delta x$ siempre que $0 < |\Delta x| < \delta$.

Lo anterior significa que $|\Delta x - f'(x)\Delta x|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeño.

Luego, $f'(x)\Delta x$ es tan buena aproximación para el incremento $|\Delta y|$ como se desee, tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeño.

Definición 2.7

Si f es una función tal que $f'(x)$ existe sobre un intervalo S y si Δx es cualquier número distinto de cero, la diferencia de f con respecto a x es igual $f'(x)$ multiplicada por Δx. Esta diferencial se denota por $d_x f(x)$ de tal forma que

$$d_x f(x) = f'(x)\Delta x$$

.

Ejemplo 2.39

Si $f(x) = 4x^2 + 1$ entonces $d_x f(x) = 8x\Delta x$.

Ejemplo 2.40

Consideremos ahora una función compuesta compuesta $h = f(g)$ donde $y = f(x)$ $x = g(t)$ siendo t la variable independiente final y "x" la variable intermedia. Luego $y = h(t)$.

Aplicando la definición 2.7 tanto a "y" como a "x" se obtiene: $d_t y = h'(t)\Delta t$, $d_t x = g'(t)\Delta t$.

Utilizando la regla de la cadena para derivar h respecto a t se obtiene que $h'(t) = f'(x)g'(t)$.

Luego $d_t y = h'(t)\Delta t = f'(x)g'(t)\Delta t = f'(x)d_t x$, fórmula que se escribe usualmente $dy = f'(x)dx$, y que se lee como la diferencial de "y" es igual a la derivada de "y" con respecto a "x", multiplicada por la diferencial de "x" donde dy, dx son diferenciales con respecto a la misma variable.

Definición 2.8

Si una función f está definida por $y = f(x)$ entonces la diferencial de x, que se denota dx, está dada por $dx = \Delta x$ donde x es la variable independiente final, y además, la diferencial "y" es siempre: $dy = f'(x)dx$.

En la figura 2.8 es fácil observar que dy es una mejor aproximación de Δy conforme Δx se hace cada vez más pequeña.

Ejemplo 2.41

Determinar Δy, dy, $\Delta y - dy$ para $y = x^2 - 3x$, $x = 2$; $\Delta x = 0.03$

Solución: Consideremos $f(x) = y = x^2 - 3x$. Calculemos primero el incremento:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x)$

$\Longrightarrow \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x$

$\Longrightarrow \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x$

$\Longrightarrow \Delta y = (2x + \Delta x - 3)\Delta x$

Ejemplo 2.41 (continuación).

Para $x = 2$, $\Delta x = 0.03$; $\Delta y = (4 + 0.03 - 3)(0.03)$ de donde $\Delta y = 0.0309$

Ahora calculemos la diferencial dy:

$dy = f'(x)dx = (2x - 3)dx$

Luego para $x = 2$, $\Delta x = 0.03$ se tiene que $dy = (2 \cdot 2 - 3)(0.03) = 0.03$

Por último $\Delta y - dy = 0.0309 - 0.03 = 0.009$.

Ejemplo 2.42

Utilizando diferenciales, calcular aproximadamente el valor de $\sqrt[3]{122}$.

Solución: Tomemos $f(x) = y = \sqrt[3]{x}$, $x = 125$, $dx = \Delta x = -3$.

Nos interesa determinar una aproximación a $y + \Delta y$ para $x = 125$ y $dx = -3$.

Para ello calculamos el diferencial de "y":

$dy = f'(x)dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$; sustituyendo "$x$" por 125 y dx por -3 se obtiene que:

$$dy = \frac{-3}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{5^6}} = \frac{-1}{5^2} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

Luego $dy = -0.04$, $y = 5 = \sqrt[3]{125}$

Así aproximamos $y + \Delta y$ para $x = 125$, $dx = \Delta x = -3$ con $y + dy = 5 - 0.04 = 4.96$

Luego $\sqrt[3]{122} = 4.96$

Ejemplo 2.43

El lado de un cuadrado es igual a 5 cm. Hallar el incremento aproximado de su área si el lado aumenta 0.01 cm.

Solución: Sea $A(x) = y = x^2$ donde x es el lado del cuadrado, A denota su área.

Se desea determinar cuánto aumenta el área cuando la longitud del lado pasa de 5 cm a 5.01 cm.

Ejemplo 2.43 (continuación).

Calculemos la diferencial de área. Así:

$dA = f'(x)dx = 2xdx,$ donde $x = 5$ y $dx = 0.01$

Luego:

$dA = 10(0.01) = 0.1$ y aproximamos $A + \Delta A$ para $x = 5$, $dx = 0.01$ con $A + dA = 25 + 0.10$ de donde $A + dA = 25.10$, área del nuevo cuadrado.

El incremento del área es de 0.1 cm^2.

Ejemplo 2.44

Al calentar una esfera de radio $R = 9\ cm,$ su volumen aumentó $32.4\pi\ cm^3$. Hallar el alargamiento del radio de la esfera.

Solución:

Sea $f(R) = y = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ la ecuación para el volumen de la esfera.

En este caso conocemos la diferencial del volumen de la esfera que está dada por $dV = 32.4\pi\ cm^3$. Debemos averiguar la diferencial o el incremento del radio, es decir $dx = \Delta x(dR = \Delta R)$

Como $dV = f'(x)dR = 4\pi R^2 dR$; $dV = 32.4\pi; cm^3$ y $R = 9\ cm$ entonces:

$32.4\pi\ cm^3 = 4\pi(9\ cm)^2 dR$ y por tanto $dR = 0.1\ cm.$

El radio de la esfera se alargó 0.1 cm.

EJERCICIOS

2.6 Resuelva los problemas siguientes:

- **a)** Hallar el valor aproximado de $(99)^{-1}$.
- **b)** Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$, donde f y g son funciones derivables sobre un dominio común. Exprese la diferencial del producto uv en términos de las diferenciales de u y v.
- **c)** Un paralelepípedo rectangular de 10cm de altura tiene por base un cuadrado cuyo lado es igual a 20cm ¿Cuánto aumentará el volumen del paralelepípedo si el lado de la base se alarga 0.02cm?
- **d)** De cada cara de un bloque cúbico de madera se saca una capa de 0.3cm de espesor. Si el bloque tenía originalmente 7cm de arista, aproximadamente ¿cuánto va a decrecer el volumen a causa del proceso?

Nota: A partir de la notación diferencial se tiene que $dy = f'(x)dx$ por lo que se puede dividir por dx obteniéndose por tanto que $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

El usar el cociente de diferenciales para denotar la derivada de f se debe a Leibniz y se utiliza a veces al denotar las derivadas de orden superior.

2.8 Derivadas de orden superior

Si f es una función diferenciable, es posible considerar su función derivada como:

$f' = \{(x,y) /\ y = D_x f(x)\}$ para x en el dominio M de f.

Si para algunos valores $x \in M$ existe el $\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ se dice que existe la segunda derivada de la función f que se denota por $f''(x)$ o $D_x^2 f(x)$, que equivale a $D_x[D_x f(x)]$. O sea, la segunda derivada de la función f se obtiene derivando la primera derivada de la función.

Ejemplo 2.45

Si $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ entonces:

$f'(x) = 15x^2 + 12x - 5$ y

$f''(x) = 30x + 12$

Ejemplo 2.46

Si $g(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ entonces:

$g'(x) = \frac{(x-1)(2x+3) - (x^2+3x)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ y derivando nuevamente

$$g''(x) = \frac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)[(x-1)(2x-2) - (x^2-2x-3)]}{(x-1)^4}$$

Por tanto $g''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$

Similarmente podemos decir que la derivada de $D_x^2 f(x)$ respecto a "x" es la tercera derivada de f respecto a "x" que se denota $D_x^3 f(x)$ o $f'''(x)$.

La derivada de la tercera derivada es la cuarta derivada $D_x^4 f(x)$ y así podríamos continuar sucesivamente hasta la enésima derivada de f que se denota por $D_x^n f(x)$ o $f^{(n)}(x)$. Generalmente se habla del orden de la derivada; así la primera derivada es la derivada de primer orden, la segunda es la de segundo orden, la enésima derivada es la derivada de orden n.

Ejemplo 2.47

Determinar $g''(x)$ si $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, donde $D_g = \mathbb{R}$.

Solución:
Obtenemos primero $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

Luego:

$$g''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x+1) \cdot \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}}{\sqrt{(x^2 + 2x + 3)^2}}$$ y se tiene que:

$$g''(x) = \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

Ejemplo 2.48

Determinar $f'''(x)$ si $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{2}{5}} + x$

Solución:
Se tiene que:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{5}x^{\frac{-3}{5}} + 1$$

$$f''(x) = \frac{-4}{9}x^{\frac{-5}{3}} + \frac{24}{25}x^{\frac{-8}{5}}$$

Por último:

$$f'''(x) = \frac{20}{27}x^{\frac{-8}{3}} - \frac{192}{125}x^{\frac{-13}{5}}$$

Ejemplo 2.49

Si $y = \sqrt{x}$ determinar $D_x^n y$.

En este caso debemos dar una forma general para la derivada de orden n, partiendo de las regularidades que se presentan en las primeras derivadas que calculemos.

Así:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$$

$$y'' = \frac{-1}{4} x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2^2} x^{\frac{-(2 \cdot 2 - 1)}{2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8} x^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{2^3} x^{\frac{-(2 \cdot 3 - 1)}{2}}$$

$$y^{iv} = \frac{-15}{16} x^{\frac{-7}{2}} = \frac{-15}{2^4} x^{\frac{-(2 \cdot 4 - 1)}{2}}$$

$$y^{v} = \frac{105}{32} x^{\frac{-9}{2}} = \frac{105}{2^5} x^{\frac{-(2 \cdot 5 - 1)}{2}}$$

$$\vdots$$

$$y^n = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{\frac{-(2n-1)}{2}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

EJERCICIOS

2.7 Obtener $D_u^n w$ si $w = \dfrac{1}{1+2u}$.

Una aplicación de la segunda derivada

Anteriormente hemos estudiado que si $s = s(t)$ nos indica la distancia de una partícula al origen en un tiempo t, entonces $D_t s(t)$ es la velocidad en el tiempo t.

Al calcular la derivada de la velocidad respecto al tiempo, es decir, al calcular $D_t v(t)$ se obtiene la aceleración instantánea en el tiempo t. Si denotamos esta aceleración por $a(t)$ se tiene que $a(t) = D_t^2 s(t)$, es decir, la aceleración es la segunda derivada de la distancia respecto al tiempo.

Ejemplo 2.50

Sea $s = \dfrac{32}{12+t^2}$ con $t \geq 0,$ la ecuación que determina la distancia en el tiempo t (en segundos) de una partícula al origen en un movimiento rectilíneo. Determinar el tiempo, la distancia, y la velocidad en cada instante en que la aceleración es nula.

Solución:

Si $s = \dfrac{32}{12+t^2}$ entonces la velocidad v está dada por:

$v(t) = \dfrac{-64t}{(12+t^2)^2} = s'(t)$ y la aceleración es $a = \dfrac{192t^2 - 768}{(12+t^2)^3} = v'(t)$

Averiguemos el tiempo en que la aceleración se hace cero:

$a(t) = 0 \iff 192t^2 - 768 = 0 \iff t^2 = 4 \iff t = 2$

Luego, la distancia recorrida cuando $t = 2$ es $s = 2$ metros y la velocidad en $t = 2$ es $v = \dfrac{-1}{2}$m/seg.

Ejemplo 2.51

Determinar la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica de la curva con ecuación $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, en los que la razón de cambio de la pendiente es cero.

Solución:

Se tiene que $y' = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ da la pendiente de la recta tangente a la curva.

Además $y'' = 12x^2 + 6x - 6$ determina la razón de cambio de la pendiente.

Debemos averiguar los valores de x en los que esta razón de cambio es cero;

Entonces $y'' = 0 \iff 6(2x-1)(x+1) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ó $x = 1$

Luego, cuando $x = \dfrac{1}{2}$ la pendiente es $y' = 12\left(\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{6}{2} - 6 = 0$ y cuando $x = -1$ la pendiente y' también es cero.

Ejemplo 2.52

Si $y = f(x)$ es la ecuación de una curva, se sabe que $f'(x)$ determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto (x,y).

Se tiene que $D_x^2 y$ es la razón de cambio de la pendiente de la recta tangente respecto a x. Más adelante utilizaremos la segunda derivada de una función para determinar los extremos relativos de una función y para determinar la concavidad de la gráfica de una función.

Ejemplo 2.53

Determinar la razón de cambio de la pendiente en $(3,27)$ para la curva con ecuación $y = (2x-3)^3$.

Solución:
La razón de cambio de la pendiente está dada por la segunda derivada de la función, así:

$D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x[6(2x-3)^2] = 12(2x-3) \cdot 2 = 24(2x-3)$

En el punto con coordenadas $(3,27)$ la razón de cambio de la pendiente es:
$24(2 \cdot 3 - 3) = 24(6-3) = 72$

Luego $D_x^2 y = 72$ en $(3,27)$.

2.9 Derivada de la función logarítmica

Vamos a estudiar la derivada de la función f definida por $f(x) = \log_a x$, donde $x \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < a < 1$ ó $a > 1$

Teorema 2.10

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, y si $x > 0$, entonces la función $\log_a = \{(x,y) / \ y = \log_a x,\ x \in]0,+\infty[\}$ es derivable sobre su dominio $]0,+\infty[$ y $D_x \log_a x = \dfrac{1}{x} \log_a e,\ x > 0$.

Ejemplo 2.54

Aplicación del teorema,

1. $D_x \log_2 x = \dfrac{1}{x} \log_2 e$
2. $D_x \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{1}{x} \log_{\frac{1}{2}} e$

Teorema 2.11

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, si la función $g = \{(x,u)/\ u = g(x)\}$ es derivable y $g(x) \neq 0$ sobre un conjunto M, entonces la función F definida por $F(x) = \log_a |g(x)|$, $x \in M$, es derivable sobre M y $D_x \log_a |u| = F(x) = \log_a |u| = \dfrac{1}{u}(\log_a e) D_x u$, $x \in M$.

Ejemplo 2.55

Aplicación del teorema,

1. $D_x \log_3(5x^2+1) = \dfrac{1}{5x^2+1} \ \log_3 e(10x) = \dfrac{10x}{5x^2+1} \ \log_3 e$
2. $D_x \log_2 \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ \log_2 e \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\log_2 e}{2x}, \ x > 0$
3. $D_x \ \log_5 \left(\dfrac{x+1}{x^2+3} \right)$

$$= \frac{1}{\frac{x+1}{x^2+3}} \ \log_5 e \cdot \frac{x^2+3}{1-(x+1)(2x)} \cdot (x^2+3)^2$$

$$= \frac{3-2x-x^2}{(x+1)(x^2+3)} \ \log_5 e, \ x > -1$$

En particular si la base de los logaritmos es e entonces el $\log_e x$ se denota por $\ln x$, y:

1. $D_x \ln x = \dfrac{1}{x} \log_e e = \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \dfrac{1}{x}$, es decir $D_x \ \ln x = \frac{1}{x}$
2. Si $g(x)$ es una función derivable con $g(x) \neq 0$ entonces:
   $D_x \ \ln |g(x)| = \dfrac{1}{g(x)} D_x(g(x))$

Ejemplo 2.56

$$D_x \ln 5x = \frac{1}{5x} D_x(5x) = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 2.57

$$D_x \ln(\sqrt{x+1} + x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+x} D_x(\sqrt{x+1} + x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 1\right), \ x > -1.$$

Ejemplo 2.58

$$D_x \ln^2 x = D_x[\ln x]^2 = 2[\ln x] \cdot D_x \ln x = 2 \ \ln \ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ \ln \ x}{x}$$

Ejemplo 2.59

$$D_x \ln^4(x^2+5) = D_x[\ln(x^2+5)]^4$$
$$= 4[\ln(x^2+5)]^3 \cdot \frac{1}{x^2+5}(2x)$$
$$= \frac{8x \cdot \ln^3(x^2+5)}{x^2+5} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.60

$$D_x[\ln(3x+1) - 4x] = \frac{3}{3x+1} - 4 = \frac{-12x-1}{3x+1}, \ x > \frac{-1}{3}.$$

Ejemplo 2.61

$D_x\left(\dfrac{2}{\ln(x+1)}\right)$
$= D_x\left(2[\ln(x+1)]^{-1}\right)$
$= -2[\ln(x+1)]^{-2}\cdot\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{-2}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

EJERCICIOS

2.8 Si $\ln 50 = 3.912$ calcule, utilizando diferenciales, un valor aproximado a tres decimales de $\ln(50.4)$.

2.10 Derivada de la función exponencial

La función exponencial de base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como ámbito $]0,+\infty[$.

En el teorema siguiente se dará la derivada de la función exponencial.

Teorema 2.12

$D_x a^x = a^x \ln a$

Prueba: (Al final del capítulo).

Ejemplo 2.62

Aplicación del teorema

1. $D_x 2^x = 2^x \ln 2$
2. $D_x 4^x = 4^x \ln 4$
3. $D_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln\dfrac{1}{2} = \dfrac{-\ln 2}{2^x}$
4. $D_x\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x \ln\dfrac{3}{4}$

Observe que si la base de la función exponencial es e, entonces $D_x e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1$ de donde $D_x e^x = e^x$.

Teorema 2.13

Si $a > 0$, con $a \neq 1$, y si $g = \{(x,y) / \ y = g(x)\}$ es derivable sobre M entonces la función compuesta $f(x) = a^{g(x)}$ es derivable sobre M y $D_x a^{g(x)} = a^{g(x)} \ln a \ D_x g(x)$, para $x \in M$.

Prueba: (Ejercicio para el estudiante).

Igual que el caso anterior, si la base de la función exponencial es e, entonces $D_x e^{g(x)} = e^{g(x)} \ln e \ D_x g(x)$ de donde $D_x e^{g(x)} = e^{g(x)} \ D_x g(x)$.

Ejemplo 2.63

Aplicación del teorema,

1. $D_x 2^{5x} = D_x 2^{5x} \cdot D_x 5x = 2^{5x} (\ln 2) \cdot 5 = 5(2^{5x} \ln 2)$
2. $D_x 3^{(x^2+1)} = D_x 3^{(x^2+1)} \cdot D_x (x^2 + x) = 3^{(x^2+1)} (\ln 3)(2x+1)$
3. $D_x 4^{\sqrt{x}} = 4^{\sqrt{x}} \ln 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4^x \ln 4}{2\sqrt{x}}$
4. $D_x e^{2x} = e^{2x} D_x (2x) = 2e^{2x}$
5. $D_x e^{5x+1} = 5e^{5x+1}$

EJERCICIOS

2.9 Determine la derivada de cada una de la funciones siguientes:

a) $f(x) = x^2 \pi^{-4x}$
b) $g(x) = 3\, e^{x^2}$
c) $h(t) = \dfrac{t^3}{e^{2t} + t}$
d) $h(x) = \ln \left(\dfrac{2 - 5\, e^x}{2 + 5\, e^{3x}} \right)$
e) $f(x) = \left(x^2 + e^{-x^3} \right) \ln(1 + 2^{-x})$

2.10 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $y = 3\, e^{-2x}$ tal que sea paralela a la recta con ecuación $x + y = 2$.

2.11 Determinar la ecuación de la recta tangente trazada a la curva con ecuación $y = e^{\frac{1}{2}x}$ en el punto de su intersección con el eje Y.

2.12 La dependencia entre la cantidad x de sustancia obtenida en cierta reacción química y el tiempo t de reacción se expresa por la ecuación $x = A(1 - e^{-kt})$. Determinar la velocidad de reacción.

2.11 Derivadas de la funciones trigonométricas

A continuación se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

1. $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$

   Prueba: (Al final del capítulo).

   Utilizando esta como guía, junto con el teorema 2.8 (derivada de un cociente de funciones), se pueden realizar las respectivas demostraciones sobre las derivadas de las funciones trigonométricas.

   En general, aplicando la regla de la cadena para funciones compuestas, se cumple que $D_x[seng(x)] = \cos g(x) \cdot D_x g(x)$.

Ejemplo 2.64

$D_x[\operatorname{sen} 6x] = \cos 6x \cdot D_x 6x = 6\ \cos 6x$

Ejemplo 2.65

$D_x \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} = \cos \sqrt[3]{x} \cdot D_x \sqrt[3]{x} = \dfrac{\cos \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Ejemplo 2.66

$D_x[\operatorname{sen} e^{4x}] = \cos e^{4x} \cdot D_x e^{4x} = \cos e^{4x} \cdot e^{4x} \cdot 4 = 4e^{4x} \cos e^{4x}$

Ejemplo 2.67

$D_x(\operatorname{sen}^4 x) = D_x[(\operatorname{sen} x)^4] = 4(\operatorname{sen} x)^3 \cdot \cos x = 4\operatorname{sen}^3 x \cos x$

EJERCICIOS

2.13 Determine la primera derivada de cada una de las funciones con ecuaciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^3 - 2x^2 + 4)$

b) $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{\ln 2}\right)$

c) $h(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$

2. $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$

En general, si $u = g(x)$ aplicando la regla de la cadena se tiene que $D_x[\cos u] = -\operatorname{sen} u \cdot D_u$

Ejemplo 2.68

$D_x[\cos(8x^3)] = -\operatorname{sen}(8x^3 \cdot D_x(8x^3) = -24x^2 \operatorname{sen}(8x^3))$

Ejemplo 2.69

$D_x\left(\cos\left(\dfrac{3}{e^x}\right)\right) = D_x[\cos(3\,e^{-x})] = -\operatorname{sen}(3\,e^{-x}) \cdot (3\,e^{-x} \cdot -1) = 3\,e^{-x} \operatorname{sen}(3\,e^{-x})$

Ejemplo 2.70

$D_x(\cos^3 x) = D_x[(\cos x)^3] = 3(\cos x)^2(-\operatorname{sen} x) = -3 \cos^2 x \operatorname{sen} x$

EJERCICIOS

2.14 Determine $f'(x)$ si:

a) $f(x) = \cos \sqrt[5]{x^2}$

b) $f(x) = \cos \left(\dfrac{3x+1}{x} \right)$

c) $f(x) = \sqrt{\cos x}, \; x \in \left] n\pi, \dfrac{2n+1}{2}\pi \right[, \; n \in Z$

d) $f(x) = 4 \cos 3^x$

3. $D_x \tan x = sec^2 x$, con $x \neq (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

En general, su $u = g(x)$ entonces aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x \tan u = \sec^2 u \cdot D_x u$.

Ejemplo 2.71

$$D_x \tan\left(\frac{2}{x}\right) = \sec^2\left(\frac{2}{x}\right) \cdot D_x \left(\frac{2}{x}\right) = \sec^2\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{-2}{x}\right) = \frac{-2}{x^2}\sec^2\left(\frac{2}{x}\right),$$
$x \neq 0$

Ejemplo 2.72

$$D_x \tan(\ln x) = \sec^2(\ln x) D_x \ln x = \frac{\sec^2(\ln x)}{x}, \; x > 0$$

Ejemplo 2.73

$$D_x \sqrt{\tan x} = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$$

EJERCICIOS

2.15 Determine $f'(x)$ si

a) $f(x) = e^{\tan x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\tan 2x}$

c) $f(x) = \tan^3(2x)$

4. $D_x[\cot x] = -\csc^2 x,\ x \neq \dfrac{\pi}{2}n,\ n \in Z$

Prueba: (Ejercicio para el estudiante).

Si $u = f(x)$, aplicando la derivada para la composición de funciones se obtiene que $D_x(\cot u) = -\csc^2 u\, D_x u$.

Ejemplo 2.74

$D_x(\cot 5x) = -\csc^2 5x \cdot 5 = -5\ \csc^2 5x$

Ejemplo 2.75

$D_x(\cot^3 5x) = D_x[(\cot 5x)^3] = 3(\cot 5x)^2 \cdot -\csc^2 5x \cdot 5$

Ejemplo 2.76

$$D_x\left(\frac{2}{\cot x}\right) = \frac{-2(-\csc^2 x)}{(\cot x)^2} = \frac{2\ \csc^2 x}{(\cot x)^2}$$

EJERCICIOS

2.16 Determine $f'(x)$ si

a) $f(x) = \cot(5^x)$

b) $f(x) = 2\sqrt[3]{\cot x}$

c) $f(x) = \cot(5x^2 + 5\ \ln\ x)$

5. $D_x(\sec x) = \sec x\ \tan x,\ x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2},\ n \in Z$

Si $u = g(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x(\sec u) = \sec u\ \tan u\ D_x u$.

Ejemplo 2.77

$D_x[\sec(2x^2)] = \sec(2x^2)\ \tan(2x^2) D_x(2x^2) = 4x\ \sec(2x^2)\ \tan(2x^2)$

Ejemplo 2.78

$D_x(e^{\sec x}) = e^{\sec x}\ \sec x\ \tan x$

Ejemplo 2.79

$D_x \sec\left(\frac{2}{x}\right) = \sec\left(\frac{2}{x}\right)\ ; \tan\left(\frac{2}{x}\right)\ D_x\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{-2}{x^2}\sec\left(\frac{2}{x}\right)\ \tan\left(\frac{2}{x}\right)$,
$x \neq 0$

EJERCICIOS

2.17 Determine $f'(x)$ si

a) $f(x) = \sec\left(\frac{2x-4}{x}\right)$

b) $f(x) = \sec\sqrt[3]{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{3x}{\sec 4x}$

6. $D_x[\csc x] = -\csc x\ \cot x,\ \ x \neq n\pi,\ \ n \in Z.$

Prueba: (Ejercicio para el estudiante)

Si $u = g(x)$, aplicando la regla de la cadena se obtiene que $D_x(\csc u) = -\csc u\ \cot u\ D_x u$.

Ejemplo 2.80

$D_x[\csc(2+x^2)] = -\csc(2+x^2)\ \cot(2+x^2)\ D_x(2+x^2) = -2x\ \csc(2+x^2)\ \cot(2+x^2)$

Ejemplo 2.81

$$D_x[\csc(2^x)] = -\csc 2^x \cot 2^x D_x 2^x = -\csc 2^x \cot 2^x \ln 2 = -2x \ln 2 \csc 2^x \cot 2^x$$

Ejemplo 2.82

$$D_x \ln(\csc x) = \frac{1}{\csc x} \cdot (-\csc x \cot x) = -\cot x$$

EJERCICIOS

2.18 Determine $f'(x)$ si

a) $f(x) = e^{\csc x^2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\csc x}$

c) $f(x) = \cot\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right), \ x \neq -1$

2.12 Derivadas de las funciones inversas

Previo al estudio de las funciones trigonométricas inversas, es necesario determinar la derivada de la función inversa de una función dada. Para ello consideremos el siguiente teorema.

Teorema 2.14

Sea f una función estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a,b]$ y g la función inversa de f.

Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para $x \in]a,b[$, entonces la función derivada $g'(y)$ también existe y no es nula en el correspondiente "y" donde $y = f(x)$.

Además se tiene que $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, o sea $D_y g(y) = \dfrac{1}{D_x f(x)}$.

Note que si $y = f(x)$ entonces $x = g(y)$ corresponde a $f^{-1}(y)$, y $D_y f^{-1}(y) = \dfrac{1}{D_x y}$

Demostración: (Al final del capítulo).

Ejemplo 2.83

Consideremos la función definida por:

$f :]0,+\infty[\longrightarrow]-3,+\infty[,\ f(x) = y = x^2 - 3$

Esta función posee función inversa definida por:

$g :]-3,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[,\ g(y) = \sqrt{y+3}$

Se tiene que $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y+3}}$

Como

$y = x^2 + 3$ entonces $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-3+3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{2x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{D_x(x^2-3)} = \dfrac{1}{f'(x)}$

Note que: $\sqrt{x^2} = |x| = x$ pues $x \in]0,+\infty[$

Ejemplo 2.84

Sea $y = f(x) = x^3$ la ecuación de una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $g(y) = \sqrt[3]{y} = x$, o sea $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Se tiene que $g'(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, y como $y = x^3$ entonces

$g'(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^3)^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^6}} = \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{f'(x)}$

Así: $D_y x = \dfrac{1}{D_x y}$

El teorema 2.14 será de gran utilidad cuando determinemos las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

2.13 Las funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Conviene recordar que:

a. Si una función es continua y estrictamente creciente (o decreciente) en un intervalo, entonces posee función inversa la cual también es continua y estrictamente creciente (o decreciente).

b. Las funciones trigonométricas son periódicas por lo que la correspondencia entre la variable independiente y la dependiente no es uno a uno.

De aquí se tiene que la inversa de una función trigonométrica no es una función, es una relación.

Sin embargo, si se restringe el dominio de una función trigonométrica se establece una relación biunívoca y la inversa de la función trigonométrica sí es una función.

Función seno inverso

Al considerar la gráfica de la función seno:

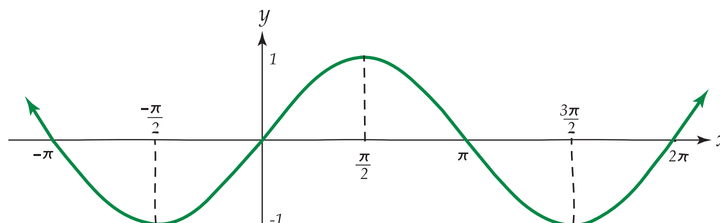


Figura 2.9 Gráfica de la función seno

Se observa que en varios intervalos, por ejemplo:

$$\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right],\left[\frac{-5\pi}{2},\frac{-3\pi}{2}\right],$$

etc, la función seno es continua y estrictamente creciente, por lo que podría escogerse alguno de ellos para definir la función inversa de la función seno. Usualmente se toma el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Luego, se define la función seno como:

$$F=\left\{(x,y)\text{ tal que } y=\operatorname{sen}x,\ \text{ con }\ x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ y\in[-1,1]\right\}$$

La función F así definida es continua y estrictamente creciente en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, por lo que existe una única función, definida en el intervalo $[-1,1]$, llamada función seno inverso. Esta función, denotada arcsen, se define como sigue:

$$f:[-1,1]\to\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ f(x)=\operatorname{arcsen}x$$

Se tiene entonces que $y=\operatorname{arcsen}x \iff x=\operatorname{sen}y,\ y\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Luego, $\operatorname{arcsen}(r)$ con $r\in[-1,1]$, es el único número $t\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\operatorname{sen}t=r$.

Ejemplo 2.85

$\operatorname{arcsen}0=0$ pues $\operatorname{sen}0=0$.

Ejemplo 2.86

$\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ pues $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejemplo 2.87

$\text{arcsen}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-\pi}{3}$ pues $\text{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

Ejemplo 2.88

$\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ pues $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La representación gráfica de la función seno y de la función arcoseno es la siguiente:

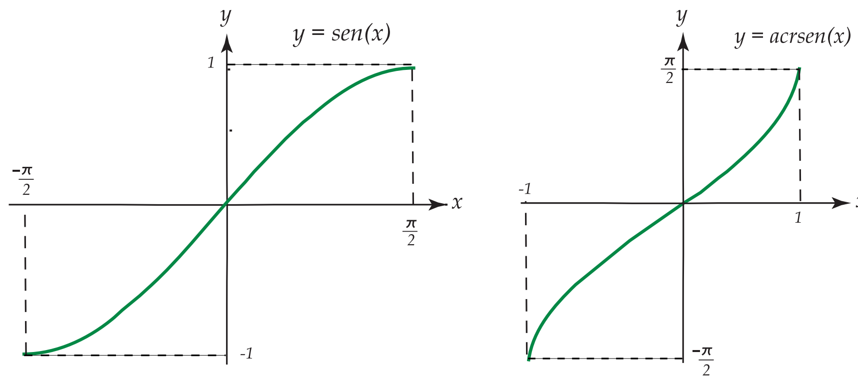


Figura 2.10 Gráfica de la función seno y arcoseno

Derivada de la función seno inverso

Como $y = \text{arcsen}\, x \iff x = \text{sen}\, y$, para $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1, 1]$, aplicando el teorema 2.14 (derivada de una función inversa) se tiene que:

$$D_x(\text{arcsen}\, x) = \frac{1}{D_y\,\text{sen}\, y} = \frac{1}{\cos y}$$

Como $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$, y $\cos y \geq 0$ para $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ pues $x = \operatorname{sen} y$.

Luego: $D_x(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ para $x \in]-1, 1[$

En general $D_x(\operatorname{arcsen} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}, f(x) \in]-1, 1[$.

Ejemplo 2.89

$$D_x(\operatorname{arcsen} 5x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x^2)^2}} \cdot D_x(5x^2) = \frac{10x}{\sqrt{1 - 25x^4}}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ejemplo 2.90

$$D_x(\operatorname{arcsen} \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot D_x(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}}, \quad x \in]0, 1[$$

Ejemplo 2.91

$$D_x(\operatorname{arcsen} x)^3 = 3(\operatorname{arcsen} x)^2 \cdot \frac{1}{1 - x^2} = \frac{3 \operatorname{arcsen}^2 x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$$

EJERCICIOS

2.19 Determine $D_x h(x)$ si:

a) $h(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2x}{x + 1}\right)$

b) $h(x) = \operatorname{arcsen}(2x^2 + 3)$

Función coseno inverso

Como en la función seno, la función coseno es continua y estrictamente creciente en varios intervalos por ejemplo: $[-2\pi, -\pi], [0, \pi], [2\pi, 3\pi]$, etc, por lo cual debe restringirse su dominio de tal forma que posea función inversa.

Sea entonces la función F tal que:

$F = \{(x, y) \text{ tal que } y = \cos x, \text{ con } x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]\}$

La función F así definida es continua y estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$, por lo que posee función inversa. Esta recibe el nombre de arco coseno, (o función coseno inverso), y se denota arccos.

Se define de la siguiente forma:

$$f : [-1,1] \to [0,\pi],\ f(x) = \arccos x$$

Se tiene que $y = \arccos x \iff x = \cos y$ con $y \in [0,\pi]$

Luego, $\arccos(k)$ con $k \in [-1,1]$, es el único número α con $\alpha \in [0,\pi]$ para el que $\cos\alpha = k$.

Ejemplo 2.92

$\arccos(-1) = \pi$ pues $\cos\pi = -1$

Ejemplo 2.93

$\arccos\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ pues $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

Ejemplo 2.94

$\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ pues $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Ejemplo 2.95

$\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ pues $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

La representación gráfica de la función coseno y la de la función arco coseno es la siguiente:

Derivada de la función coseno inverso

Como $y = \arccos x \iff x = \cos y$ para $y \in [0,\pi]$, $x \in [-1,1]$, aplicando el teorema 2.14 (derivada de la función inversa), se tiene que:

$$D_x(\arccos x) = \frac{1}{D_y \cos y} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\operatorname{sen} y}$$

Como $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$, y $\operatorname{sen} y \geq 0$ para $y \in [0,\pi]$ entonces $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ pues $x = \cos y$.

Luego: $D_x(\arccos x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $x \in]-1,1[$

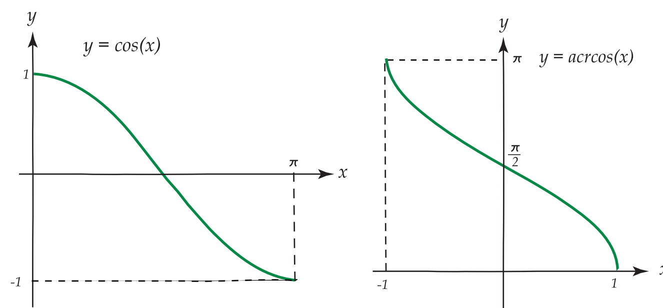


Figura 2.11 Gráfica de la función coseno y arcocoseno

En general $D_x(\arccos f(x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot D_x f(x), f(x) \in]-1,1[$.

Ejemplo 2.96

$$D_x(\arccos(3x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot D_x(3x) = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}, \ \ |x| < \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2.97

$$D_x\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot D_x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, \ \ |x| > 1$$

Ejemplo 2.98

$$D_x(\arccos(e^x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^e = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \ \ x \in]-1,0[$$

EJERCICIOS

2.20 Determine $D_x g(x)$ si:

a) $g(x) = \arccos(2x+1)$

b) $g(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{\arccos x}\right)$

Función tangente inversa

Igual que en los dos casos anteriores, vamos a restringir el dominio de la función tangente al intervalo $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, en el que es continua y estrictamente creciente, por lo que posee función inversa.

Luego se define la función tangente como:

$G=\left\{(x,y) \text{ tal que } y=\tan x, \text{ con } x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, y\in\mathbb{R}\right\}$

Se define la función tangente inversa, también llamada arco tangente, y denotada arctan, como:

$$f:\mathbb{R}\to\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, f(x)=\arctan x$$

Se tiene que $y=\arctan x \iff x=\tan y$ con $y\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $x\in\mathbb{R}$

Luego, $\arctan(k)$ con $k\in\mathbb{R}$ es el único número α con $\alpha\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ para el que $\tan\alpha=k$.

Ejemplo 2.99

$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ pues $\tan\frac{\pi}{4}=1$

Ejemplo 2.100

$\arctan 0=0$ pues $\tan 0=0$

Ejemplo 2.101

$\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-\pi}{6}$ pues $\tan(\frac{-\pi}{6})=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Además:

$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi^-}{2}$ pues $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\frac{-\pi^+}{2}$ pues $\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$

La representación gráfica de la función tangente y la de la función arcotangente es la siguiente:

Derivada de la función arcotangente

Como $y=\arctan x \iff x=\tan y$ para $y\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $x\in\mathbb{R}$, aplicando el teorema 2.14 (derivada de la función inversa), se tiene que:

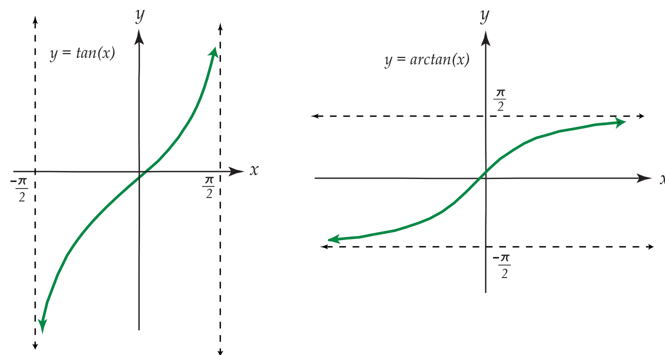


Figura 2.12 Gráfica de la función tangente y arcotangente

$D_x(arctan\ x) = \dfrac{1}{D_y \tan y} = \dfrac{1}{\sec^2 y}$

Como $\tan^2 y + 1 = \sec^2 y$, y $x = \tan y$ entonces $\sec^2 y = 1 + x^2$ por lo que:

$D_x(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$

En general $D_x(\arctan f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} \cdot D_x f(x)$

Ejemplo 2.102

$$D_x(\arctan(5x^3)) = \frac{1}{1+(5x^3)^2} \cdot D_x(5x^3) = \frac{15x^2}{1+25x^6}, \ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.103

$$D_x(\arctan(\sqrt{x})) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}, \ x > 0$$

Ejemplo 2.104

$$D_x(\arctan(\ln x)) = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot D_x(\ln x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}, \ x > 0$$

EJERCICIOS

2.21 Determine $D_x h(x)$ si:

a) $h(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{2x+1}\right), \ x \neq \dfrac{-1}{2}$

b) $h(x) = \dfrac{2x}{\arctan(x+1)}, \ x \neq -1$

c) $h(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right), \ x \neq 0$

Función cotangente inversa

Para definir la función inversa de la función cotangente, vamos a restringir el dominio de ésta al intervalo $]0,\pi[$, en el que es continua y estrictamente decreciente, por lo que posee función inversa.

Se define función cotangente como:

$H = \{(x,y) \text{ tal que } y = \cot x, \ \text{con } \ x \in]0,\pi[, \ y \in \mathbb{R}\}$

La función cotangente inversa, llamada también arcocotangente y denotada arccot, se define como:

$$f : \mathbb{R} \to]0,\pi[, \ f(x) = \operatorname{arccot} x$$

Por la definición de la función arco cotangente se tiene que $y = \operatorname{arccot} x \iff \cot y = x$ con $y \in]0,\pi[, \ x \in \mathbb{R}$

Luego, $\operatorname{arccot} k$ con $k \in \mathbb{R}$ es el único número α con $\alpha \in]0,\pi[$ para el que $\cot \alpha = k$.

Ejemplo 2.105

$\operatorname{arccot}(1) = \frac{\pi}{4}$ pues $\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Ejemplo 2.106

$\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$ pues $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ejemplo 2.107

$\operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$ pues $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

Además:

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x = 0^+$ pues $\lim_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi^-$ pues $\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$

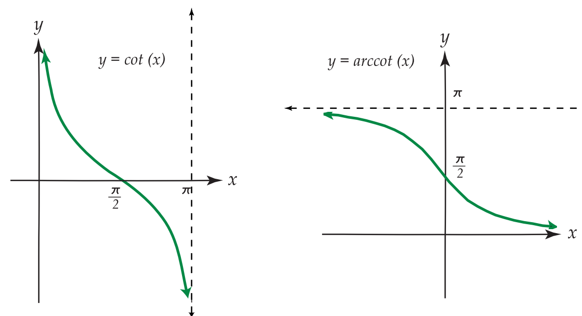


Figura 2.13 Gráfica de la función cotangente y arcocotangente

La representación gráfica de la función cotangente y la de la función arcocotangente es la siguiente:

Derivada de la función cotangente inversa

Como $y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y$ para $y \in]0, \pi[$, $x \in \mathbb{R}$, aplicando el teorema 2.14 se tiene que:

$$D_x(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{D_y \cot y} = \frac{1}{-\csc^2 y} = \frac{-1}{\csc^2 y}$$

Como $\cot^2 y + 1 = \csc^2 y$, y $x = \cot y$ entonces $\csc^2 y = 1 + x^2$ por lo que:

$$D_x(\operatorname{arccot} x) = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

En general $D_x(\operatorname{arccot} f(x)) = \dfrac{-1}{1+[f(x)]^2} \cdot D_x f(x)$

Ejemplo 2.108

$$D_x(\operatorname{arccot}(7\sqrt{x})) = \frac{-1}{1+(7\sqrt{x})^2} \cdot D_x(7\sqrt{x}) = \frac{-7}{2\sqrt{x}(1+49x)},\ x > 0$$

Ejemplo 2.109

$$D_x(\operatorname{arccot}^2 x) = 2 \operatorname{arccot} x \cdot \frac{-1}{1+x^2} = \frac{-2 \operatorname{arccot} x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.110

$$D_x(\operatorname{arccot}(e^x)) = \frac{-e^x}{1+e^{2x}},\ x \in \mathbb{R}$$

EJERCICIOS

2.22 Determine $D_x h(x)$ si:

a) $h(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{arccot} x}$

b) $h(x) = \sqrt{\operatorname{arccot} x}$

Función secante inversa

Vamos a elegir como dominio de la función secante el intervalo I de donde $I = \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que en I la función secante es biunívoca y la derivada de la función inversa puede expresarse por medio de una sola fórmula.

La representación gráfica de la función secante en el intervalo señalado es el siguiente:

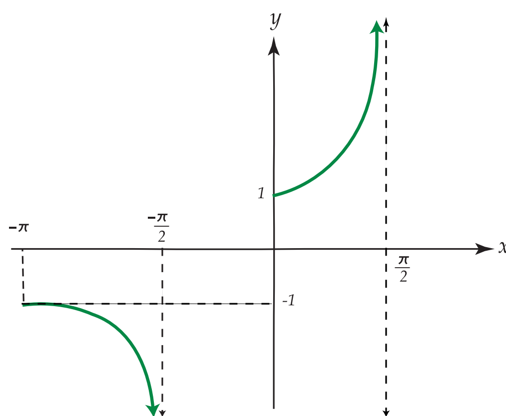


Figura 2.14 Gráfica de la función secante

Como puede observarse, la función secante es continua en I, siendo estrictamente decreciente en $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Existe por tanto la función secante inversa, llamada también arco secante y se denota arcsec, definida por:

$$f :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\longrightarrow \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \; f(x) = \operatorname{arcsec} x$$

Por la definición de función arcosecante se tiene que:

$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y = x$ con $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Luego, $\operatorname{arcsec}(k)$ con $k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ es el único número α con $\alpha \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\sec \alpha = k$.

Ejemplo 2.111

$$\operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6} \text{ pues } \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2.112

$$\operatorname{arcsec}(-1)=\pi \text{ pues } \sec(\pi)=-1$$

Ejemplo 2.113

$$\operatorname{arcsec}(2)=\frac{\pi}{3} \text{ pues } \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$$

La representación gráfica de la función arcosecante es la siguiente:

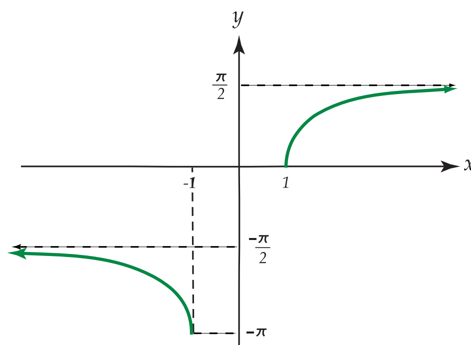


Figura 2.15 Gráfica de la función arcosecante

Note que:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcsec} x=\frac{\pi^-}{2} \text{ pues } \lim_{x\to\frac{\pi^-}{2}} \sec x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcsec} x=\frac{-\pi^-}{2} \text{ pues } \lim_{x\to\frac{-\pi^-}{2}} \sec x=-\infty$$

Derivada de la función secante inversa

Como $y=\operatorname{arcsec} x \iff x=\sec y$ con $y\in\left[-\pi,\frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, utilizando el teorema 2.14, se obtiene que:

$D_x(\operatorname{arcsec} x) = \dfrac{1}{D_y \sec y} = \dfrac{1}{\sec y \, \tan y}$

Como $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$, y $\tan y > 0$ cuando $y \in \left[-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, entonces $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ pues $x = \sec y$

Luego $D_x(\operatorname{arcsec} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, con $|x| > 1$

En general, si $u = f(x)$ con $|f(x)| > 1$ entonces $D_x(\operatorname{arcsec} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot D_x u$

Ejemplo 2.114

$$D_x(\operatorname{arcsec}(2x)) = \frac{1}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} \cdot D_x(2x) = \frac{2}{2x\sqrt{4x^2-1}}, \quad x > \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.115

$$D_x\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \cdot D_x\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2 \cdot \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{-1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}, \quad |x| < 1$$

EJERCICIOS

2.23 Determine $D_x h(x)$ si:

a) $h(x) = \operatorname{arcsec} \sqrt{x}$

b) $h(x) = \operatorname{arcsec}(3x+2)$

Nota: La función secante inversa también suele definirse por la siguiente igualdad:

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{con } |x| \geq 1$$

En este caso $D_x \operatorname{arcsec}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ con $|x| > 1$

Se deja como ejercicio para el estudiante que compruebe esta igualdad.

Función cosecante inversa

Tomaremos como dominio de la función cosecante el intervalo $I = \left[-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, en el que la función cosecante es biunívoca.

La representación gráfica de la función cosecante en el intervalo señalado es la siguiente:

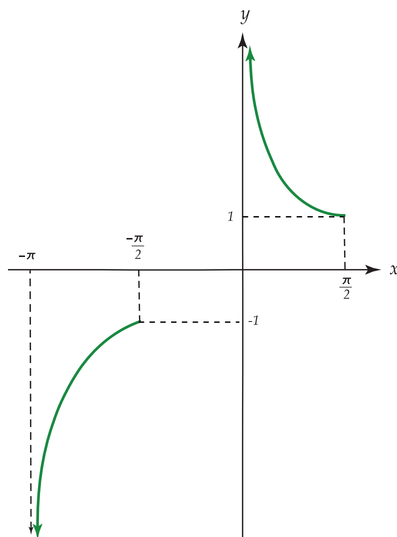


Figura 2.16 Gráfica de la función cosecante

Como puede observarse, la función cosecante es continua en I, siendo estrictamente creciente en $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$ y estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Existe por tanto la función cosecante inversa, llamada también arco cosecante y que se denota arccsc , definida por:

$$f :]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[\longrightarrow \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]\ \cup\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \operatorname{arccsc} x$$

Por la definición de función arco cosecante se tiene que:

$y = \operatorname{arccsc} x \iff x = \csc y$ con $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]\ \cup\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x \in]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$

Luego, $\operatorname{arccsc}(k)$ con $k \in]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$, es el único número α con $\alpha \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]\ \cup\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\csc \alpha = k$.

Ejemplo 2.116

$\operatorname{arccsc}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ pues $\csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 2.117

$\operatorname{arccsc}(-1) = \dfrac{-\pi}{2}$ pues $\csc\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -1$

Ejemplo 2.118

$\operatorname{arccsc}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ pues $\csc\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

Ejemplo 2.119

$\operatorname{arccsc}(-2) = \dfrac{-5\pi}{6}$ pues $\csc\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = -2$

La representación gráfica de la función arcocosecante es la siguiente:

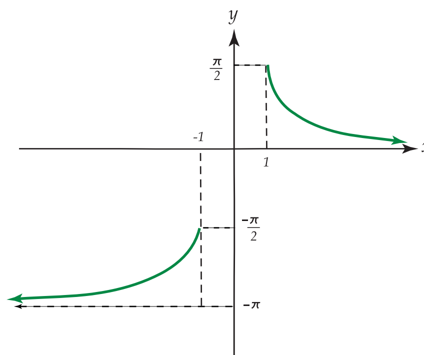


Figura 2.17 Gráfica de la función arcocosecante

Note que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccsc} x = 0^+$ pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \csc x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccsc} x = -\pi^+$ pues $\lim\limits_{x\to -\pi^+} \csc x = -\infty$

Derivada de la función cosecante inversa

Como $y = \operatorname{arccsc} x \iff x = \csc y$ para $y \in \left[-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$, utilizando el teorema 2.14, se obtiene que:

$$D_x(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{D_y \csc y} = \frac{1}{-\csc y \cot y} = \frac{-1}{\csc y \cot y}$$

Como $\cot^2 y = \csc^2 y - 1$, y $\cot y > 0$ para $y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\cot y = \sqrt{\csc^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ pues $x = \csc y$.

Luego $D_x(\operatorname{arccsc} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$, para $|x| > 1$

En general, si $u = f(x)$ con $|f(x)| > 1$ entonces $D_x(\operatorname{arccsc} u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot D_x u$

Ejemplo 2.120

$$D_x(\operatorname{arccsc}\left(x^2\right)) = \frac{-1}{x^2\sqrt{(x)^4-1}} \cdot D_x(x^2) = \frac{-2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, \; x > 1$$

Ejemplo 2.121

$$D_x(\operatorname{arccsc}(e^x)) = \frac{-1}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot D_x e^x = \frac{-e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}, \; x > 0$$

EJERCICIOS

2.24 Determine $D_x h(x)$ si:

a) $h(x) = \operatorname{arccsc}(\sqrt[3]{x})$

b) $h(x) = \operatorname{arccsc}(\frac{2}{x})$

Nota: La función cosecante inversa también suele definirse por la siguiente igualdad:

$\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ con $|x| \geq 1$.

Además $D_x \operatorname{arccsc} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ con $|x| > 1$, igualdad que debe comprobar el estudiante como ejercicio.

Verifiquemos que $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}$.

$$\operatorname{arccsc} x = y \iff \csc y = x \iff \tfrac{1}{\operatorname{sen} y} = x \iff \tfrac{1}{x} = \operatorname{sen} y \iff \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{1}{x}\right) = y$$

Luego $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$, y se verifica la igualdad.

2.14 Funciones paramétricas

En algunos casos la ecuación de una función o de una relación no está dada en la forma $y = f(x)$ o $f(x,y) = 0$, como en las igualdades $y = 5x^2 + 3x$, o, $x^2 + y^2 = 4$, sino que está determinada por un par de ecuaciones en términos de una misma variable.

Ejemplo 2.122

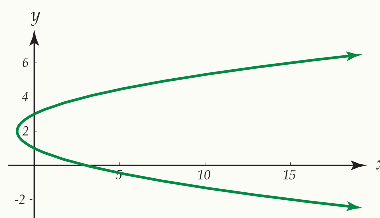
Consideremos las ecuaciones $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$ con $t \in \mathbb{R}$.

Se tiene que a cada valor de t le corresponde un punto (x,y) del plano, el conjunto de los cuales determina una relación $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$.

La siguiente tabla de valores:

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

nos permite hacer la representación gráfica de la relación de la siguiente manera:



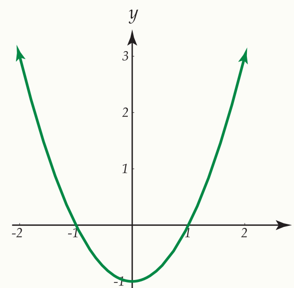
En general, las ecuaciones $x = g(t)$, $y = h(t)$ con h y g funciones continuas en un intervalo I, $(I \subseteq \mathbb{R})$ reciben el nombre de ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de una curva en el plano XY. La gráfica de las ecuaciones paramétricas está dada por el conjunto de puntos del plano XY, que se obtiene cuando t, que recibe el nombre de parámetro, toma todos sus valores posibles en el dominio I.

La relación que determinan las ecuaciones paramétricas, en general no es una función, como sucede en el ejemplo 2.122. Sin embargo, en algunos casos, la relación dada sí es una función.

Ejemplo 2.123

Sean $x = \dfrac{t}{2},\ y = \dfrac{t^2}{4} - 1$ con $t \in \mathbb{R}$.

La representación gráfica es la siguiente:



Obtenemos la siguiente tabla de valores:

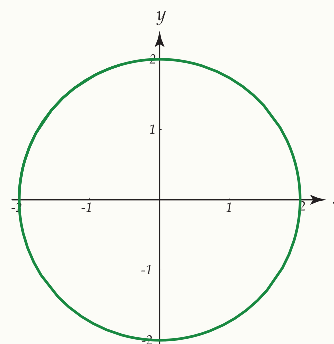
t	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	$\frac{-5}{2}$	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	$\frac{21}{4}$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{-3}{4}$	-1	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

En este caso, al sustituir $x = \dfrac{t}{2}$ en $y = \dfrac{t^2}{4} - 1$ se obtiene que $y = x^2 - 1$ que es la ecuación de la parábola con el eje Y como el eje de simetría por lo que sí es una función. Note que la ecuación obtenida involucra únicamente las variables "x" e "y". Se dice entonces que el parámetro ha sido eliminado.

En algunos casos, en la eliminación del parámetro se utiliza una o más identidades trigonométricas como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.124

Sea Q la relación con representación paramétrica $x = 2\ \text{sen}\,t,\ \ y = 2\ \cos t$ con $t \in \mathbb{R}$. Se tiene que $Q = \{(x,y)$ tal que $x = 2\ \text{sen}\,t,\ y = 2\ \cos t,\ t \in \mathbb{R}\}$



Vamos a expresar la relación Q utilizando únicamente las variables "x" e "y" como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2\,\text{sen}\,t)^2 + (2\cos t)^2 \\ &= 4\,\text{sen}^2\,t + 4\cos^2 t \\ &= 4(\text{sen}^2\,t + \cos^2 t) = 4 \end{aligned}$$

de donde $x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 2. Luego Q no representa una función y su representación gráfica está a la derecha.

Q puede expresarse entonces como:

$$Q = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 = 4\ \ x \in [-2,2],\ \ y \in [-2,2]\}$$

Ejemplo 2.125

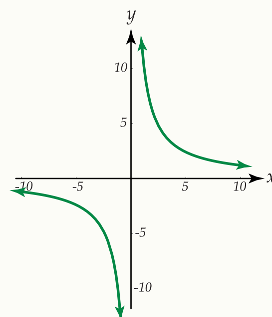
Sea ahora $\Re$ la relación con representación paramétrica $x = 2t,\ y = \frac{6}{t}$ con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

En este caso $\Re = \{(x,y) / \ x = 2t,\ y = \frac{6}{t}\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\}$

Para expresar $\Re$ en términos de "x" e "y", se despeja t en alguna de las ecuaciones y se sustituye en la otra como se muestra a continuación:

Si $x = 2t$ entonces $t = \frac{x}{2}$, y $y = \frac{6}{\frac{x}{2}} = \frac{12}{x}$

Luego la ecuación $y = \frac{12}{x}$ para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, tiene como representación gráfica la figura a la derecha



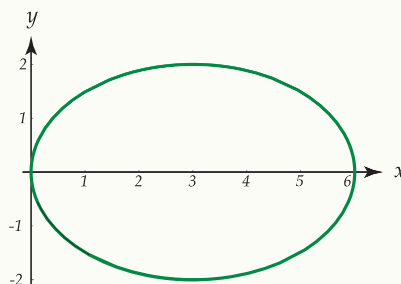
Ejemplo 2.126

Por último verifiquemos que $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ es una ecuación de la relación determinada por las ecuaciones paramétricas $x = 3(1 - \cos\theta)$, $y = 2\ \text{sen}\,\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$.

Como $x = 3(1 - \cos\theta)$ entonces $\cos\theta = 1 - \frac{x}{3}$, y como $y = 2\ \text{sen}\,\theta$ entonces $\text{sen}\,\theta = \frac{y}{2}$

Luego $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + (1 - \frac{x}{3})^2$, de donde $1 = \frac{y^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{9}$, que es la ecuación de una elipse con centro en $(3,0)$.

Su representación gráfica es la siguiente:



Derivada de la función dada paramétricamente

El siguiente teorema nos proporciona las condiciones necesarias para obtener la derivada de una función dada en forma paramétrica.

Teorema 2.15

Sean f y g funciones derivables en un intervalo $]t_1, t_2[$. Supongamos que f tiene una inversa derivable en ese intervalo. Entonces en cada punto donde $f'(t) \neq 0$, las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ implican que existe una función derivable F tal que $y = f(x)$, y además $D_x y = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{D_t y}{D_t x}$

Ejemplo 2.127

Determinar los puntos de la curva con ecuaciones $x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$ en los que que es cero la pendiente de la recta tangente a la curva.

Solución:
Recuerde que la pendiente de la recta tangente está dada por $D_x y$.

Como $D_t x = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}$, y $D_t y = -\dfrac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$ entonces $D_x y = \dfrac{t^2+1}{2t}$

La pendiente de la recta tangente es cero cuando $D_x y = 0$, en este caso cuando $t^2 + 1 = 0$; pero esta igualdad no se cumple para ningún valor real de t. Luego, no existe ningún punto de la curva dada donde la pendiente de la recta tangente sea cero.

Ejemplo 2.128

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuaciones $x = Bt$, $y = Ct - dt^2$ cuando $t = 0$

Solución: La ecuación de la recta tangente está dada por $y = mx + b$, donde $m = D_x y$.

Se tiene que $D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x} = \dfrac{C - 2dt}{B}$

Cuando $t = 0$ entonces $D_x y = \dfrac{C}{B}$, por lo que $y = \dfrac{C}{B}x + b$ $(*)$

Cuando $t = 0$ se obtiene $x = 0$, $y = 0$, y al sustituir en $(*)$ se obtiene: $b = 0$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{C}{B}x$

Ejemplo 2.129

Determine $D_x y$ si $x = e^t$, $y = 1 + t^2$ con $t \in \mathbb{R}$

Solución:
Por el teorema se tiene que $D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x}$

Luego: $D_t y = 2t$, $D_t x = e^t$ $(e^t \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R})$ por lo que $D_x y = \dfrac{2t}{e^t}$

Derivadas de orden superior para una función dada en forma paramétrica

Si x y y están dadas en forma paramétrica entonces $D_x^2 y$ puede expresarse como sigue:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x}$$

Ejemplo 2.130

Si $x = 2t^3 + \operatorname{sen} t$, $y = t^2 - \cos t$ entonces $D_x y = \dfrac{2t + \operatorname{sen} t}{6t^2 + \cos t}$ y $D_x^2 y = \dfrac{D_t(D_x y)}{D_t x} = \dfrac{D_t\left(\frac{2t+\operatorname{sen} t}{6t^2+\cos t}\right)}{D_t(2t^3 + \operatorname{sen} t)}$

$$= \frac{(6t^2 + 2)\cos t + 1 - 12t^2 - 10\ \operatorname{sen} t}{(6t^2 + \cos t)^2 (6t^2 + \cos t)}$$

En general, para obtener la enésima derivada, cuando las ecuaciones están dadas en forma paramétrica, se aplica la siguiente igualdad:

$$D_x^n y = \frac{D_t(D_x^{n-1} y)}{D_t x}$$

2.15 Funciones implícitas y su derivada

Al considerar la función con ecuación $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$, es posible determinar $f'(x)$ con los teoremas enunciados anteriormente, ya que f es una función dada implícitamente en términos de la variable independiente x.

Sin embargo, existen funciones que no están definidas en forma explícita, ejemplos de las cuales son las siguientes:

$3x^2y^2 - 5xy^3 + x = 5$, $x^2 - x = 5xy^2 - y^4$

Estas ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para "y" en términos de "x". Se dice que la función f está definida implícitamente por las ecuaciones: $3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$ y $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$, respectivamente.

Note que ambas expresiones son de la forma general $g(x,y) = 0$. Interesa ahora determinar la derivada de una función dada en forma implícita.

Ejemplo 2.131

a. $3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$

Observe que $3x^2[f(x)]^2$ involucra un producto de funciones y que para derivar $[f(x)]^2$ se debe utilizar la regla de la cadena.

Se tiene entonces derivando:

$$3x^2 \cdot 2[f(x)] \cdot D_x f(x) + 6x\,[f(x)]^2 - \left[5x \cdot 3[f(x)]^2 \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^3\right] + 1 = 0$$

$$6x^2 f(x) \cdot D_x f(x) + 6x[f(x)]^2 - 15x[f(x)]^2 \cdot D_x f(x) - 5[f(x)]^3 + 1 = 0$$

Despejando $D_x f(x)$ se tiene que:

$$D_x f(x) = \frac{5[f(x)]^3 - 6x[f(x)]^2 - 1}{6x^2 f(x) - 15x[f(x)]^2}$$

Sustituyendo "y" por $f(x)$ se obtiene:

$$D_x y = \frac{5y^3 - 6xy^2 - 1}{6x^2 y - 15xy^2}$$

b. $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$ derivando

$$2x - 1 = 5x \cdot 2f(x) \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^2 - 4[f(x)]^3 \cdot Dx f(x)$$

$$2x - 1 = 10x f(x) \cdot D_x f(x) + 5[f(x)]^2 - 4[f(x)]^3 \cdot D_x f(x)$$

$$2x - 1 - 5[f(x)]^2 = (10x\, f(x) - 4[f(x)]^3) \cdot D_x f(x)$$

de donde $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - 5[f(x)]^2}{10x\, f(x) - 4[f(x)]^3}$

y sustituyendo $y = f(x)$ se tiene:

$$D_x y = y' = \frac{2x - 1 - 5y^2}{10xy - 4y^3}$$

El proceso realizado en estos dos ejemplos recibe el nombre de derivación implícita, y puede ser utilizado únicamente bajo el supuesto de que la ecuación dada especifica una función. En caso de que no sea así, aunque se realicen las operaciones, el resultado carece de sentido.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 9 = 0$ no puede ser satisfecha por ningún valor real de "x" y "y". Al realizar el procedimiento anterior se obtiene que $2x + 2y \cdot D_x y + 0 = 0$ de donde $D_x y = \frac{-x}{y}$, fórmula que parece tener significado para "x" y "y" siempre que $y \neq 0$, aunque de hecho no puede existir derivada ya que la ecuación dada no especifica ninguna función f.

La derivación implícita determina una fórmula para $D_x f(x)$, que es válida para toda función derivable f tal que $f(x)$ esté definida implícitamente por una ecuación dada.

Ejemplo 2.132

Suponiendo que existe una función derivable f tal que $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$, calcular $D_x y$.

Solución: Derivando implícitamente se obtiene:

$3x^2 + 3y^2 \cdot D_x y - 6x + 6y \cdot D_x y = 0$

$(3y^2 + 6y) \cdot D_x y = 6x - 3x^2$

$D_x y = \frac{6x - 3x^2}{3y^2 + 6y} = \frac{2x - x^2}{y^2 + 2y}$

Note que hemos trabajado como si $y = f(x)$.

Ejemplo 2.133

En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente y una ecuación para la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P. Graficar la curva, la recta tangente y la recta normal.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$, $P(1,3)$.

b. $y^2 = 4ax$; $P(a,2a)$, $a > 0$.

Solución:

a. Primero obtenemos $D_x y$ que nos da la pendiente de la recta tangente: $2x + 2y \cdot D_x y - 4 + 6 \cdot D_x y - 0 = 0$ de donde $D_x y = \frac{2 - x}{y + 3}$

Ejemplo 2.133 (continuación).

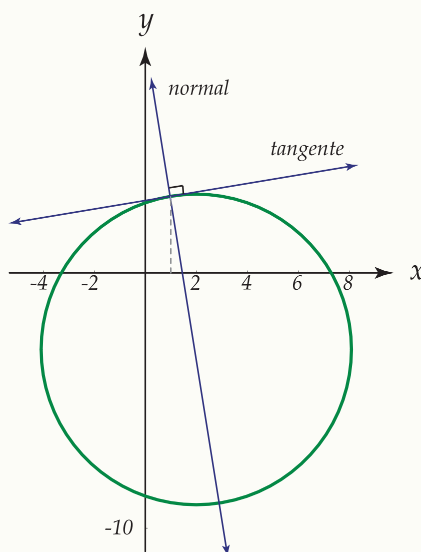
Evaluando $D_x y$ en $P(1,3)$ se tiene que $m_t = \frac{1}{6}$.

Luego $y = \frac{1}{6}x + b$. Sustituyendo $(1,3)$ se obtiene que $b = \frac{17}{6}$ por lo que la ecuación de la recta tangente es $y = \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -6$ de donde la ecuación de esta recta es: $y = -6x + b_1$; sustituyendo nuevamente en $(1,3)$ se obtiene que $b_1 = 9$.

La ecuación de la recta normal es: $y = -6x + 9$.
La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$ puede escribirse como $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$ que representa la ecuación de una circunferencia con centro en $(2,-3)$ y radio 6.

La representación gráfica de la curva y las rectas es la siguiente:



b. Dada la ecuación $y^2 = 4ax$ obtenemos $D_x y$. como $2y \cdot D_x y = 4a$ entonces $D_x y = \frac{2a}{y}$

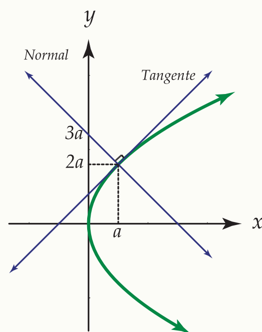
Evaluando en $P(a,2a)$ se tiene que $D_x y = \frac{2a}{2a} = 1$.

Luego, la pendiente de la recta tangente es $m_T = 1$ y la ecuación es $y = x + b$. Sustituyendo $(a,2a)$ en esta ecuación se obtiene que $b = a$ por lo que finalmente la ecuación de la recta tangente es $y = x + a$.

La pendiente de la recta normal es $m_N = -1$ y la respectiva ecuación es: $y = -x + b$. Sustituyendo (x,y) por $(a,2a)$ se obtiene que $b = 3a$ por lo que la ecuación de la recta normal es $y = -x + 3a$.

Ejemplo 2.133 (continuación).

La representación gráfica de la curva, las recta tangente y de la recta normal es la siguiente:



EJERCICIOS

2.25 Probar que las rectas tangentes en el origen a las curvas con ecuaciones $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$, $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, son perpendiculares entre sí.

2.26 En cada caso:

a. Determinar $D_x y$ en términos de "x" y "y" utilizando la derivación implícita.

b. Despejar "y" en términos de "x" y demostrar que cada solución y su derivada satisfacen la ecuación obtenida en a.

a) $x^2 - 2xy = 5$

b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, a constante.

c) $2x^2 - 3xy - 4y^2 = 5$

2.27 Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $x - y = \sqrt{x+y}$ en el punto $(3,1)$.

2.15.1 Derivada de segundo orden para una función dada en forma implícita

Especificaremos en los ejemplos siguientes el procedimiento que se sigue para determinar $D_x^2 y$.

Ejemplo 2.134

Sea la ecuación $x^3 - xy + y^3 = 0,$ obtenemos primero $D_x y$ en la forma siguiente:

$3x^2 - (x \cdot D_x y + y) + 3y^2 \cdot D_x y = 0$

de donde $D_x y = \dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$

ahora $D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x \left(\dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x} \right)$

$$D_x^2 y = \frac{(3y^2 - x)(D_x y - 6x) - (y - 3x^2)(6y D_x y - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

se sustituye $D_x y,$ y se obtiene:

$$D_x^2 y = \frac{(3y^2 - x)\left(\frac{y-3x^2}{3y^2-x} - 6x\right) - (y - 3x^2)\left(6y \cdot \frac{y-3x^2}{3y^2-x} - 1\right)}{(3y^2 - x)^2}$$

Simplificando:

$D_x^2 y = \dfrac{2xy\,(27xy - 27(x^3 + y^3) - 2)}{(3y^2 - x)^3}$ pero de la ecuación original $x^3 + y^3 = xy$ por lo que: $27xy - 27xy - 2 = -2,$ y

$$D_x^2 y = \frac{-4xy}{(3y^2 - x)^3}$$

Ejemplo 2.135

Determinar $D_x^2 y$ si $ax^2 + 2xy + by^2 = 1$

Primero calculamos $D_x y$

$2ax + 2x \cdot D_x y + 2y + 2by \cdot D_x y = 0$

$$D_x y = \frac{-2ax - 2y}{2x + 2by} = \frac{-ax - y}{x + by}$$

Luego:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = D_x \left(\frac{-ax - y}{x + by} \right)$$

$$D_x^2 y = \frac{(x + by)(-a - D_x y) - (-ax - y)(1 + b \cdot D_x y)}{(x + by)^2}$$

$$D_x^2 y = \frac{(abx - x)D_x y - aby + y}{(x + by)^2}$$

Ejemplo 2.135 (continuación).

$D_x^2 y = \dfrac{(ab-1)(x \cdot D_x y - y)}{(x+by)^2}$ sustituyendo $D_x y$ se tiene:

$D_x^2 y = \dfrac{(ab-1)\left(x \cdot \frac{-ax-y}{x+by} - y\right)}{(x+by)^2}$

$D_x^2 y = \dfrac{-(ab-1)(ax^2+2xy+by^2)}{(x+by)^2}$

$D_x^2 y = \dfrac{-(ab-1)(1)}{(x+by)^3} = \dfrac{1-ab}{(x+by)^3}$ pues $ax^2+2xy+by^2 = 1$ en la ecuación original.

EJERCICIOS

2.28 Determine $D_x^2 y$ y exprese el resultado en la forma más simplificada posible.

a) $x^2 - 2y^2 = 4$
b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ a cte.
c) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ a cte, b cte.

2.16 Teorema de Rolle

Teorema 2.16

Sea f una función que cumple las condiciones siguientes:

1. f es continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$.
2. f es derivable sobre un intervalo abierto $]a,b[$.
3. $f(a) = f(b) = 0$.

Entonces existe por lo menos un número real c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = 0$. O sea $f'(x) = 0$ para cierto c entre a y b.

Interpretación geométrica. El teorema 2.16 puede interpretarse geométricamente de la manera siguiente:

> Si una curva continua interseca al eje X en $(a,0)$ y $(b,0)$ y tiene una recta tangente en cada uno de los puntos del intervalo $]a,b[$, entonces existe por lo menos un punto de la curva en el que la recta tangente es paralela al eje X.

Gráficamente se tiene:

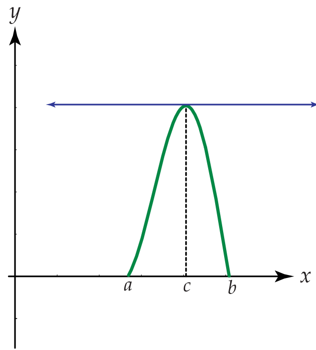


Figura 2.18 Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

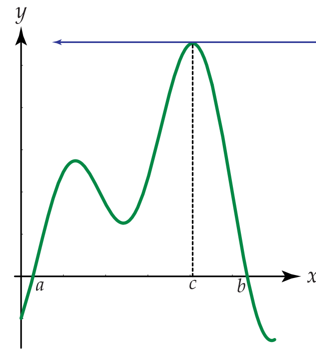
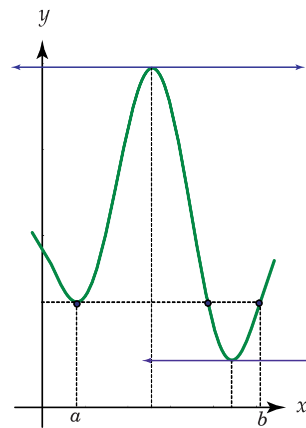


Figura 2.19 Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

El teorema 2.16 también es válido para una función derivable que aunque en los extremos del intervalo $[a,b]$ no interseque al eje X, sí tome valores iguales para a y b, es decir, $f(a) = f(b)$.

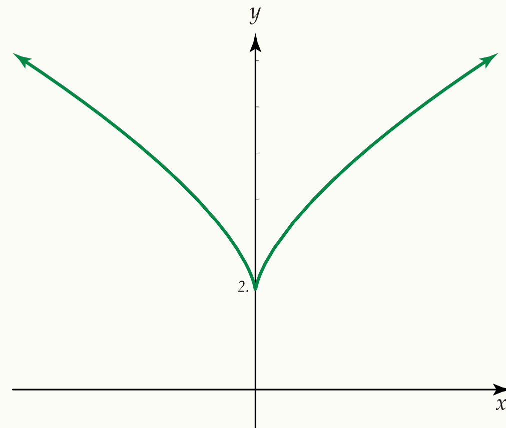
Es necesario que la función posea derivada en todos los puntos del intervalo, ya que aunque la función sea continua en el intervalo, si no es derivable en algún punto, puede suceder que no exista ningún valor c para el que $f'(c)$ sea igual a cero.



Ejemplo 2.136

La función f con ecuación $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$ y además se cumple que $f(-1) = f(1)$, pero la derivada de f, $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ no está definida para $x = 0$, $(0 \in]-1,1[)$, y se tiene que $f'(x)$ no se hace cero en el intervalo dado.

La representación gráfica de esta función en el intervalo $[-1,1]$ es la siguiente:



Ejemplo 2.137

Para cada una de las funciones cuyas ecuaciones se dan a continuación, verificar que se cumplen las condiciones del teorema 2.16 (Teorema de Rolle) en el intervalo indicado, y determinar un valor adecuado c que satisfaga la conclusión de este teorema:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2;\ [1,2]$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2;\ [-1,2]$

3. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x;\ [0,1]$ (Ejercicio para el estudiante).

4. $f(x) = \cos^2 x;\ \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (Ejercicio para el estudiante).

Solución:

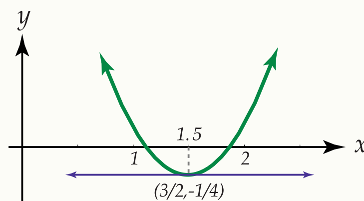
1. Por ser f una función polinomial es derivable y por lo tanto continua para todo $x \in \mathbb{R}$. se cumplen entonces las dos primeras condiciones en el intervalo $[1,2]$.

   Además $f(1) = 0$ y $f(2) = 0$ por lo que la curva interseca al eje X y se cumple la tercera condición.

   Luego, debe existir por lo menos un número $c \in]1,2[$ tal que $f'(x) = 0$.

   Como $f'(x) = 2x - 3$ y $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \frac{3}{2}$ entonces puede tomarse $c = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \in]1,2[$.

   Luego en el punto $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ la recta tangente es paralela al eje X.



2. De nuevo, f es una función polinomial y por tanto es derivable, y continua para toda $x \in \mathbb{R}$. En particular, en el intervalo $[-1,2]$ se cumplen las dos primeras condiciones.

   Además $f(-1) = 0$ y $f(2) = 0$ verificándose la tercera condición.

   Luego, el teorema 2.16 es válido en el intervalo $[-1,2]$ y existe $c \in]-1,2[$ tal que $f'(c) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ entonces $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ o $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$. Note que ambos valores pertenecen al intervalo $]-1,2[$.

   Luego, en los puntos $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{-8-27\sqrt{7}}{27}\right)$ y $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-116-26\sqrt{7}}{27}\right)$, la recta tangente tiene pendiente cero y por tanto dicha recta es paralela al eje X.

2.17 Teorema del valor medio para derivadas (Lagrange)

Teorema 2.17

Sea f una función que cumple las propiedades siguientes:

1. Es continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$.

2. Es derivable sobre un intervalo abierto $]a,b[$.

Entonces existe por lo menos un número c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Prueba: (Al final del capítulo).

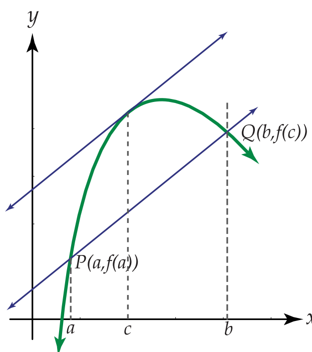
El teorema 2.17 se utiliza para demostrar varios teoremas tanto del cálculo diferencial como del cálculo integral.

En su demostración se utilizará el teorema 2.16 (Teorema de Rolle).

Interpretación geométrica

El teorema2.17 (Teorema del valor medio) puede interpretarse geométricamente como sigue:

Consideremos la representación gráfica de una curva continua f:



La recta secante que une los puntos $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ tiene como pendiente $m_s = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Según el teorema 2.17, debe existir algún punto sobre la curva, localizado entre P y Q, en el que la recta tangente sea paralela a la recta secante que pasa por P y Q; es decir, existe algún número $c \in]a,b[$ tal que $m_s = f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejemplo 2.138

Para cada función cuya ecuación se da, verificar que se cumplen las condiciones del teorema 2.17 en el intervalo dado, y determinar un valor adecuado c que satisfaga la conclusión de este teorema:

1. $f(x) = x^3 + x^2 - x;\ [-2,1]$

2. $f(x) = \sqrt{10 - x^2};\ [-6,8]$

3. $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1};\ \left[\dfrac{3}{2},3\right]$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7};\ [2,6]$

Solución:

1. Por ser f una función polinomial, es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$ por lo que debe existir por lo menos un número $c \in]-2,1[$ tal que:

   $$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-2)}{3} = 1$$

   Además $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ por lo que $f'(c) = 3c^2 + 2c - 1$.

   Como $f'(c) = 1$ entonces $3c^2 + 2c - 1 = 1$ por lo que $c = \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ o $c = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3}$.

   Luego en $\left(\dfrac{-1 + \sqrt{7}}{3}, \dfrac{11 - 5\sqrt{7}}{27}\right)$ y en $\left(\dfrac{-1 - \sqrt{7}}{3}, \dfrac{11 + 5\sqrt{7}}{27}\right)$ la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(-2,-2)$ y $(1,1)$.

2. Como f es continua en el intervalo $[-10,10]$ y derivable en el intervalo $]-10,10[$ cumplirá ambas condiciones en el intervalo $[-6,8] = [a,b]$.

   Luego debe existir por lo menos un número $c \in]-6,8[$ tal que

   $$f'(c) = \frac{f(8) - f(-6)}{8 - (-6)} = \frac{6 - 8}{14} = \frac{-1}{7}$$

   Como $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{10 - x^2}}$, entonces $f'(c) = \dfrac{-c}{\sqrt{100 - c^2}}$ por lo que $f'(c) = \dfrac{-1}{7} = \dfrac{-c}{\sqrt{100 - c^2}}$

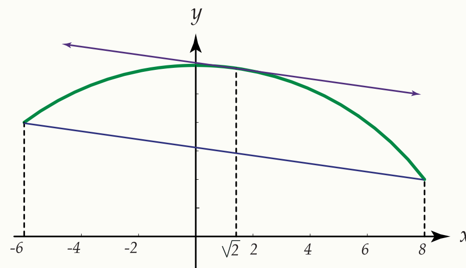
   Resolviendo la ecuación se obtiene que $c = \sqrt{2}$ o $c = -\sqrt{2}$

   Aunque ambos valores de c pertenecen al intervalo $]-6,8[$, se tiene que $f'(x) = \dfrac{-1}{7}$ únicamente cuando $c = \sqrt{2}$.

Ejemplo 2.138 (continuación).

Luego en $P(\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$ la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(-6,8)$ y $(8,6)$.

Gráficamente se tiene:



El análisis de las otras funciones queda como ejercicio para elestudiante.

2.18 Teorema de Cauchy del valor medio (o extensión del teorema del valor medio para derivadas)

Teorema 2.18

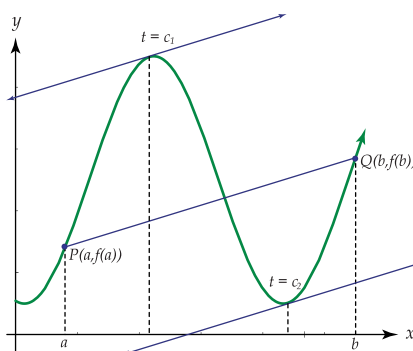
Sean f y g dos funciones continuas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables sobre el intervalo abierto $]a,b[$.

Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a,b[$, entonces existe un número $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Interpretación geométrica

Considere la representación gráfica de una curva $y = h(x)$, que tiene ecuaciones paramétricas $x = g(t)$, $y = f(t)$ donde $t \in [a,b]$.



Utilizando la derivación paramétrica se obtiene que la pendiente de la recta tangente a la curva en un determinado valor está dada por

$$D_x y = \frac{D_t f(t)}{D_t g(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Además, la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(g(a), f(a))$, $Q(g(b), f(b))$ está dada por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Por el teorema 2.18 (Teorema de Cauchy del valor intermedio), existe por lo menos un valor c en $]a, b[$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En este caso, hay dos valores de t que satisfacen la conclusión del teorema y son $t = c_1$, $t = c_2$.

Ejemplo 2.139

En cada caso, determinar los valores $c \in]a, b[$ tales que satisfacen el teorema 2.18.

1. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $]a, b[=]0, 2[$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $]a, b[=]0, 2[$

Solución:

1. Las funciones f y g son continuas y derivables en el intervalo $]0, 2[$ por ser funciones polinomiales.

   Además: $g(2) = 4$ y $g(0) = 0$ por lo que $g(2) \neq g(0)$; $g'(x) = 2x$, y $2x$ es diferente de cero para $x \in]0, 2[$. Como se cumplen todas las condiciones existe c en $]0, 2[$ tal que:

   $$\frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   Como $f(2) = 8$, $f(0) = 0$, $f'(x) = 3x^2$, y $g'(x) = 2x$ entonces sustituyendo en la expresión anterior:

Ejemplo 2.139 (continuación).

$\dfrac{8-0}{4-0} = \dfrac{3c^2}{2c}$ de donde $2 = \dfrac{3}{2}c$ y se obtiene que $c = \dfrac{4}{3}$.

1. Las funciones f y g son continuas y derivables en el intervalo $]0,2[$ pues ambas son el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ donde $Q(x) = x^2+1$ es diferente de cero para x en $]0,2[$.

   Además: $g(2) = \dfrac{-3}{5}$ y $g(0) = 1$ por lo que $g(2) \neq g(0)$; $g'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$, es diferente de cero para $x \in]0,2[$. Como se cumplen todas las condiciones del teorema 2.18, existe c en $]0,2[$ tal que:

   $$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   Como $f(2) = \dfrac{4}{5}$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \dfrac{2-2x}{(1+x^2)^2}$, y $g'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ entonces sustituyendo en la igualdad anterior se tiene: $\dfrac{-4}{3} = \dfrac{2-2c^2}{-4c}$ y $10c^2 = 6$ por lo que $|c| = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

   Como $c = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ no pertenece al intervalo $]0,2[$, el valor que satisface la conclusión del teorema es $c = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, que sí pertenece al intervalo dado.

El teorema 2.18 (Teorema de Cauchy del valor intermedio) será utilizado en la demostración de algunos teoremas que se refieren a la regla de L'Hôpital y que serán estudiados en el próximo apartado.

2.19 Regla de L'Hôpital

2.19.1 Introducción

La regla de L'Hôpital es un método que se le atribuye al matemático francés Guillaume Francois de L'Hôpital (1661-1707). Este escribió el primer libro de cálculo conteniendo su método, junto con J. Bernoulli. Fue publicado en 1696.

Este método nos permite calcular ciertos límites que con los procedimientos estudiados anteriormente no era posible resolver. Así, al evaluar límites de la forma $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en algunos casos se podía aplicar el teorema para el límite de un cociente:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Aún cuando $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, a veces es posible determinar $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Por ejemplo el $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$ que es de la forma "$\frac{0}{0}$" puede escribirse como $\lim_{x\to 2} \frac{(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} =$ $\lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{5}{2}$

Sin embargo, existen límites como $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$ en los que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando x tiende a 2, para los que no hemos dado ningún procedimiento que permita determinar su valor.

El siguiente teorema llamado Regla de L'Hôpital proporciona el instrumento adecuado para la evaluación de tal tipo de límites.

2.19.2 Regla de L'Hôpital

Teorema 2.19

Sean f y g funciones que satisfacen las condiciones del teorema 2.18 en cierto intervalo $[a,b]$ y tales que $f(a) = g(a) = 0$.

Entonces, si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe , también existirá $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

También, si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Ejemplo 2.140

Calculemos el $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$ utilizando el teorema 2.19.

Observe que $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$ por lo que se tiene la forma "$\frac{0}{0}$" .

Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Nota: Si $f'(a) = 0$ y $g'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones que se especificaron para las funciones f y g, según la hipótesis de el teorema de la Regla de L'Hôpital, entonces puede aplicarse de nuevo la Regla de L'Hôpital, obteniéndose que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Puede operarse así sucesivamente siempre que se presente la forma "$\frac{0}{0}$" .

Ejemplo 2.141

Calculemos los límites siguientes:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

   Note que $\tan 0 - 0 = 0$, $0 - \operatorname{sen} 0 = 0$; se presenta la forma $\dfrac{0}{0}$ y puede aplicarse el teorema.

   Luego:

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$

   aquí se presenta de nuevo la forma "$\dfrac{0}{0}$" por lo que es posible aplicar otra vez el teorema 2.19.

   Entonces:

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

   $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$

   $= \lim_{x\to 0} \dfrac{2sec\ x\ \tan x\ \sec x}{\operatorname{sen} x}$

   $= \lim_{x\to 0} \dfrac{2sec^2 x\ \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

   $= \lim_{x\to 0} \dfrac{2sec^2\ x}{\cos x} = \dfrac{2 \cdot 1}{1} = 2.$

2. $\lim_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1 - y}{y^2}$ forma: $\dfrac{e^0 - 1 - 0}{0} = \dfrac{0}{0}$

   $= \lim_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{2y}$ forma: $\dfrac{e^0 - 1}{2 \cdot 0} = \dfrac{0}{0}$

   $= \lim_{y\to 0} \dfrac{e^y}{2} = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo 2.141 (continuación).

$$
\begin{aligned}
3 &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\tan^3\theta} \quad \text{forma: } \frac{0 - \operatorname{sen}0}{\tan^3 0} = \frac{0}{0} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{3\tan^2\theta \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{3 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^4\theta(1 - \cos\theta)}{3(1 - \cos^2\theta)} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^4\theta}{3(1 + \cos\theta)} = \frac{1}{3(1+1)} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS

2.29 Calcule los límites siguientes utilizando la Regla de L'Hôpital.

Antes de aplicarla asegúrese de tener la forma indeterminada "$\frac{0}{0}$" .

a) $\lim_{y \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{\pi - y}}$

b) $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}$

c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

Teorema 2.20

Sean f y g funciones derivables, (y por tanto continuas), en un intervalo $[h, +\infty[$, donde h es una constante positiva. Sea $g'(x) \neq 0$ para $x \in [h, +\infty[$.

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ y si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Además, si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

El teorema 2.20 nos permite aplicar la regla de L'Hôpital a límites en que se presenta la forma $\frac{0}{0}$, cuando la variable independiente tiende hacia $+\infty$. También puede aplicarse cuando $x \to -\infty$ y se tiene que $f(x) \to 0$, y $g(x) \to 0$.

Ejemplo 2.142

Calculemos los siguientes límites utilizando el teorema 2.20.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x}\right)}$

   Cuando $x \to +\infty$ se tiene que $\dfrac{1}{x^2} \to 0$, y $\dfrac{2}{x} \to 0$ por lo que $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2}{x}\right) \to 0$.

   Se presenta la forma "$\dfrac{0}{0}$" y podemos aplicar el teorema 2.20.

   Luego:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{x^{-3}}}{2\operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{-2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x}\right)} \quad \text{forma } "\frac{0}{0}"$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\cos\left(\frac{4}{x}\right)\cdot\frac{-4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4\cos\left(\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{4\cos 0} = \frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ forma $\dfrac{\operatorname{sen} 0}{\arctan 0} = \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{-1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right] = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ forma $\dfrac{0}{e^0-1} = \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2.$$

2.19.3 Aplicación de la Regla de L'Hôpital a otras formas indeterminadas

La Regla de L'Hôpital también se aplica en los casos en que un cociente presenta algunas de las formas siguientes:

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}$$

Daremos a continuación, sin demostración, los teoremas que permiten evaluar tal tipo de límites.

Teorema 2.21

Sean f y g funciones continuas y derivables para todos los valores en un intervalo abierto I, excepto cuando $x = a$, $(a \in I)$.
Si para $x \neq a$ se tiene que:

i. $g'(x) \neq 0$

ii. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

iii. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

iv. existe el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$

entonces también existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Ejemplo 2.143

Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\tan \pi\, x}$

Observe que:

a. $x \to \dfrac{1}{2}^- \Longrightarrow x < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2x - 1 < 0 \Longrightarrow 1 - 2x > 0 \Longrightarrow 1 - 2x \to 0^+ \Longrightarrow \ln(1-2x) \to -\infty.$

b. $x \to \dfrac{1}{2}^- \Longrightarrow \pi x \to \dfrac{\pi}{2}^- \Longrightarrow \tan(\pi x) \to +\infty.$

Luego, se presenta la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ por lo que puede aplicarse el teorema 2.21 como sigue:

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\tan \pi\, x}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\frac{-2}{1-2x}}{\pi \sec^2 \pi\, x}$ (Recuerde que $\sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$)

Ejemplo 2.143 (continuación).

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-2\cos^2(\pi x)}{\pi(1-2x)} \quad \text{forma } \frac{-2\cos^2(\frac{\pi}{2})}{\pi(1-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{4\pi(\cos \pi x)(\operatorname{sen} \pi x)}{-2\pi}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} -2(\cos \pi x)(\operatorname{sen} \pi x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\tan \pi x} = 0$$

Teorema 2.22

Sean f y g funciones derivables para toda $x > h$, donde h es una constante positiva. Además, para $x > h$ se cumple que $g'(x) \neq 0$ sí:

i $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (o $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)

ii $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (o $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$)

iii $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Entonces el $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ también existe y $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

El teorema 2.22 también es válido cuando se sustituye $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$

Además, si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Ejemplo 2.144

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^{bu}}$ forma: $\frac{+\infty}{+\infty}$ pues $e^{bu} \to +\infty$ cuando $u \to +\infty$ $(b > 0)$

$$= \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{be^{bu}} = 0$$

Ejemplo 2.144 (continuación).

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}$

Este límite puede escribirse también como:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}$ que presenta la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$

luego:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{3e^{3x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3e^{x}} = 0$$

2.19.4 Límites que presentan la forma “$0 \cdot \infty$”

Si $= \lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ entonces el $= \lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)]$ puede designarse por la forma $0 \cdot \infty$ que no coincide con ninguna de las expresiones en las que es posible aplicar la Regla de L'Hôpital.

Sin embargo, es posible hacer transformaciones algebráicas de manera que se obtengan las formas "$\frac{0}{0}$" o "$\frac{\infty}{\infty}$", como sigue:

1. $= \lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ y se tiene $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$

2. $= \lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ y se tiene "$\frac{0}{0}$" cuando $x \to a$

En estos dos casos sí es posible aplicar los teoremas de la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.145

Calcular los límites siguientes:

1. $= \lim_{x\to 0^+} [2x \ln x]$

   Como $x \to 0^+$ entonces $2x \to 0^+$ y $\ln x \to -\infty$

   Pero $2x \ln x$ puede escribirse como $\frac{\ln(x)}{\frac{1}{2x}}$ que presenta la forma $\frac{-\infty}{+\infty}$ lo que nos permite aplicar la Regla de L'Hôpital como sigue:

   $$= \lim_{x\to 0^+} [2x \ln x] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{2x}}$$

   $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2x^2}}$$

   $$= \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$$

2. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

   Note que si $x \to 0^+$ entonces $\operatorname{sen} x \to 0^+$ y $\ln x \to -\infty$ pero $\operatorname{sen} x \ln x$ puede escribirse como:

   $\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\ln x}{\csc x}$ que presenta la forma $\frac{-\infty}{+\infty}$ cuando $x \to 0^+$.

   Luego:

   $$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$$

   $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}$$

   $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x}$$

   $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \quad \text{forma } "\frac{0}{0}"$$

   $$= \frac{-1}{1} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = -1 \cdot 0 = 0$$

   Por tanto: $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = 0$

Ejemplo 2.145 (continuación).

3 $\lim_{x \to 1^-} (1-x) \tan\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)$

Este límite vuelve a presentar la forma forma $0 \cdot \infty$, sin embargo, la expresión $(1-x) \tan\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right)$ puede también escribirse como:

$\dfrac{(1-x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ que presenta la forma "$\dfrac{0}{0}$" , cuando $x \to 1^-$. Luego, calculamos el límite como sigue:

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \tan\left(\frac{\pi\, x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{\frac{-\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right)} = \frac{2}{\pi}$$

2.19.5 Otras formas indeterminadas

Si en el $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ se presenta alguno de los tres casos siguientes,

1. $= \lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $= \lim_{x \to a} g(x) = 0$

2. $= \lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $= \lim_{x \to a} g(x) = 0$

3. $= \lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $= \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

entonces dicho límite presenta las formas 0^0, ∞^0, y 1^∞ respectivamente.

Para calcular este tipo de límites se sigue el siguiente procedimiento:

Consideremos la igualdad $y = [f(x)]^{g(x)}$, tomando logaritmo natural a ambos lados de ella se tiene: $\ln y = g(x)[\ln f(x)]$. Note que en la expresión $g(x)[\ln f(x)]$ presenta en todos los casos la forma $0 \cdot \infty$.

Los límites en que se presenta esta forma indeterminada fueron estudiados anteriormente.

Tenemos entonces que:

$$\lim_{x \to a} \ln y = \lim_{x \to a} g(x)[\ln f(x)]$$

Como la función logaritmo es continua podemos escribir:

$$\ln[\lim_{x\to a} y] = \lim_{x\to a}[g(x)\ln[f(x)]]$$

$$\implies \lim_{x\to a} y = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[\ln f(x)]}$$

$$\implies \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[\ln f(x)]}$$

Utilizando el procedimiento descrito anteriormente, vamos a calcular algunos límites de ejemplo.

Ejemplo 2.146

Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

Solución: Si $x \to 1^+$ entonces $\dfrac{1}{x-1} \to +\infty$ por lo que se tiene la forma $(1)^{+\infty}$

Luego:

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}\cdot \ln x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1}}$$

Note que el $= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1}$ presenta la forma $\dfrac{0}{0}$ por lo que puede aplicarse la Regla de L'Hôpital.

Entonces:

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x}} = e^1 = e$$

Ejemplo 2.147

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

Solución: Si $x \to 0^+$ entonces $\frac{1}{x} \to +\infty$ y, $\tan x \to 0$ por lo que se tiene la forma $(+\infty)^0$.

Luego:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\tan x\, \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]}$$

Note que $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\tan x\, \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ presenta la forma $0 \cdot +\infty$. Este último límite puede escribirse como: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$ que es ahora de la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ y al cual puede aplicarse la Regla de L'Hôpital.

Entonces:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\frac{-1}{x^2}\cdot x}{-\csc^2 x}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}} \quad \text{forma "}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1}} = e^0 = 1$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1$$

Ejemplo 2.148

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x}$

Solución: Se presenta la forma $(0^+)^{0^+}$ por lo que:

$$\lim_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x \ln x)}$$

El $\lim\limits_{x\to 0^+} [\operatorname{sen} x \ln x]$ es de la forma $0 \cdot (-\infty)$, que puede escribirse como $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\csc x}$, que es ahora de la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, y podemos por tanto aplicar la Regla de L'Hôpital.

Luego:

$$\lim_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}}$$

$$= e^{-1 \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1}} = e^{-1\cdot 0} = e^0 = 1$$

Ejemplo 2.149

Calcule $\lim\limits_{u\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}}$

Solución: Si $u \to 0$ entonces $\dfrac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1$ y $u^{-2} = \dfrac{1}{u^2} \to +\infty$ por lo que $\lim\limits_{u\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}}$ es de la forma $(1)^{+\infty}$

Luego:

Ejemplo 2.149 (continuación).

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}} = e^{\lim\limits_{u\to 0}\left[u^{-2}\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)\right]}$$

el $\lim\limits_{u\to 0}\left[u^{-2}\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)\right]$ es de la forma $0\cdot +\infty$ y puede escribirse como $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)}{u^2}$ al cual puede aplicarse la Regla de L'Hôpital pues es de la forma "$\frac{0}{0}$" .

Entonces:

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}} = e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)}{u^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\left[\frac{\frac{u}{\operatorname{sen} u}\cdot\frac{u\cos u-\operatorname{sen} u}{u^2}}{2u}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{u\cos u-\operatorname{sen} u}{2u^2\operatorname{sen} u}} \quad \text{forma "}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\cos u-u\operatorname{sen} u-\cos u}{4u\operatorname{sen} u+2u^2\cos u}}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-u\operatorname{sen} u}{4u\operatorname{sen} u+2u^2\cos u}}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\operatorname{sen} u}{4\operatorname{sen} u+2u^2\cos u}} \quad \text{forma "}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\cos u}{4\cos u+2\cos u-2u\operatorname{sen} u}} = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

Luego:

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^{u^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

Otra forma indeterminada

En algunos límites se presenta la forma $(+\infty) - (+\infty)$ de la cual no se puede dar un resultado inmediato. Sin embargo, mediante algunas transformaciones algebráicas es posible obtener la forma "$\frac{0}{0}$" y aplicar luego la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.150

Calcule $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

Solución: Consideramos dos casos:

a. Si $x \to 1^+$ entonces $x > 1$ y $x^2 > 1$ por lo que $x - 1 \to 0^+$ y $x^2 - 1 \to 0^+$ de donde $\frac{2}{x^2 - 1} \to +\infty$ y $\frac{1}{x - 1} \to +\infty$

   Luego $\left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \to (+\infty) - (+\infty)$ cuando $x \to 1^+$

b. Si $x \to 1^-$ entonces $x < 1$ y $x^2 < 1$ por lo que $x - 1 \to 0^+$ y $x^2 - 1 \to 0^-$ de donde $\frac{2}{x^2 - 1} \to -\infty$ y $\frac{1}{x - 1} \to +\infty$

   Luego $\left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \to (+\infty) - (+\infty)$ cuando $x \to 1^-$

Note que en ambos casos se tiene $(+\infty) - (+\infty)$

Resolvemos el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{1}{x - 1} \right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2 - (x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{x^2 - 1} \text{ forma } "\frac{0}{0}"$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2}$$

Ejemplo 2.151

Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$

Solución: Consideramos los siguientes casos:

a. Si $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$ entonces $\cos x \to 0^-$ por lo que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \to -\infty$ y $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to -\infty$

Luego $(\sec x - \tan x) \to (-\infty) - (-\infty)$ cuando $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$

b. Si $x \to \dfrac{\pi^-}{2}$ entonces $\cos x \to 0^+$ por lo que $\sec x \to +\infty$ y $\tan x \to +\infty$

Luego $(\sec x - \tan x) \to (+\infty) - (+\infty)$ cuando $x \to \dfrac{\pi^-}{2}$

Note que en ambos casos se tiene $(+\infty) - (+\infty)$. Procedemos como sigue para determinar el valor del límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{forma } \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.152

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - 2e^{3x}\right)$

Solución: Si $x \to +\infty$ entonces $x^3 \to +\infty$ y $e^{3x} \to +\infty$ tenemos que aparece la forma $(+\infty) - (+\infty)$

Para este tipo de límite se factoriza algunos de los sumandos de la manera siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 2e^{3x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left[1 - \frac{2e^{3x}}{x^3}\right]$$

Ejemplo 2.152 (continuación).

Calculemos ahora: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{3x}}{x^3}$ que presenta la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{3x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6e^{3x}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9e^{3x}}{1} = +\infty$$

Luego: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{2e^{3x}}{x^3}\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

Ejemplo 2.153

Calcular $\lim\limits_{x\to0^+} (e^{\frac{1}{x}} + \ln x)$

Solución: Si $x \to 0^+$ entonces $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ $\ln x \to -\infty$ de nuevo aparece $+\infty - \infty$

Factorizamos:

$$\lim_{x\to0^+} (e^{\frac{1}{x}} + \ln x) = \lim_{x\to0^+} e^x \left[1 + \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}\right]$$

Calculemos $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}$ que presenta la forma $\dfrac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x}} = 0$$

Luego: $\lim\limits_{x\to0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} + \ln x\right) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$

3 APLICACIONES DE LA DERIVADA

Además de la utilización de la derivada para el cálculo de ciertos límites, (Regla de L'Hôpital), es posible, por medio de ella, obtener información sobre el comportamiento de una función, lo que permite contar con ciertos criterios que ayudan a representarla gráficamente.

3.1 Funciones crecientes y decrecientes y su relación con la derivada

Sea f una función continua con ecuación $y = f(x)$, definida en un intervalo $[a,b]$. La siguiente es la representación gráfica de f en el intervalo $[a,b]$.

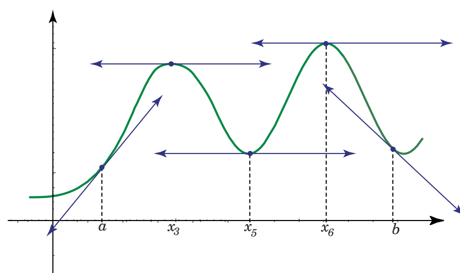


Figura 3.1

En la representación gráfica anterior puede observarse la función f es:

1. Creciente en los intervalos $]a,x_3[$, $]x_5,x_6[$

2. Decreciente en los intervalos $]x_3,x_5[$, $]x_6,b[$

También se tiene que cuando la pendiente de la recta tangente es positiva, la función f crece; y cuando la pendiente de la recta tangente es negativa, la función decrece.

Note además que en los puntos $(x_3,f(x_3))$, $(x_5,f(x_5))$ y $(x_6,f(x_6))$ la recta tangente es horizontal, por lo que su pendiente es cero, es decir, la primera derivada de la función se anula en cada uno de esos puntos.

En los siguientes teoremas se formalizan las apreciaciones anteriores.

Teorema 3.1

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a,b[$.

1. Si $f'(x) > 0$ para toda x en $]a,b[$, entonces la función f es creciente en $[a,b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para toda x en $]a,b[$, entonces la función f es decreciente en $[a,b]$.

Ejemplo 3.1

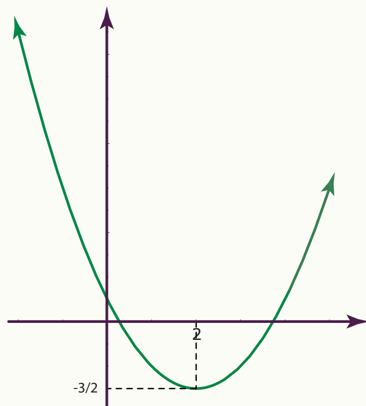
Determinemos los intervalos en que crece o decrece la función con ecuación $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 1)$.

Para ello calculemos la primera derivada de f : $f'(x) = x - 2$.

Como $f'(x) > 0 \iff x - 2 > 0$, o sea si $x > 2$, entonces f es creciente para $x > 2$.

Como $f'(x) < 0 \iff x - 2 < 0$, o sea si $x < 2$, entonces f es decreciente para $x < 2$.

En la representación gráfica de la función puede observarse lo obtenido anteriormente.



Ejemplo 3.2

Determine en cuáles intervalos crece o decrece la función con ecuación $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ con $x \neq 0$.

La derivada de f está dada por $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$ que puede escribirse como $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$

Como $2(x^2 - 1)$ es positivo para toda x en $\mathbb{R}$ entonces:

Ejemplo 3.2 (continuación).

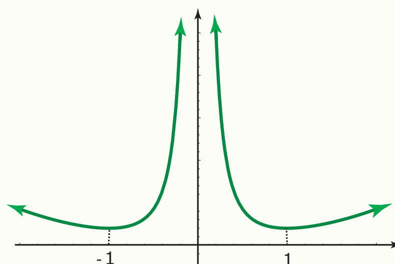
$f'(x) > 0 \iff \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^3} > 0$ y $f'(x) < 0 \iff \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^3} < 0$

Para resolver estas desigualdades recurrimos a la siguiente tabla.

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego: $f'(x) > 0$ si $x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[$ por lo que la función f crece en el intervalo $]-1,0[\cup]1,+\infty[$.
Además: $f'(x) < 0$ si $x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[$ de donde la función f decrece en el intervalo $]-\infty,-1[\cup]0,1[$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



Ejemplo 3.3

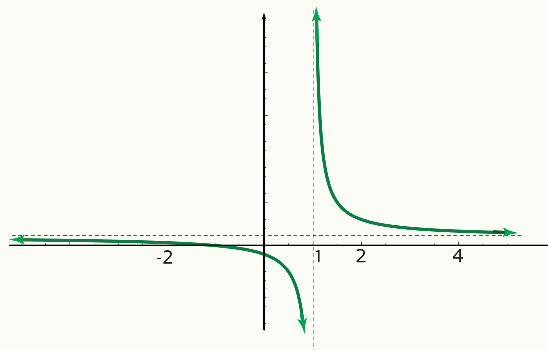
Determinar los intervalos en que crece o decrece la función f con ecuación

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad \text{con} \quad x \neq 1$$

La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Como $(x-1)^2$ es mayor que cero para x en $\mathbb{R}$, $x \neq 1$, y además $-2 < 0$ entonces $f'(x) < 0$ para todo x en $\mathbb{R}$ $(x \neq 1)$, por lo que la función f es decreciente para x en $\mathbb{R}$, $x \neq 1$.

La siguiente, es la representación gráfica de dicha función:



3.2 Valor máximo y valor mínimo de una función

Si f es una función dada, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo de f, si existe un intervalo abierto $]a,b[$ tal que $a < c < b$ y $f(c) \geq f(x)$ para $x \in]a,b[$, siendo x un valor del dominio de la función.

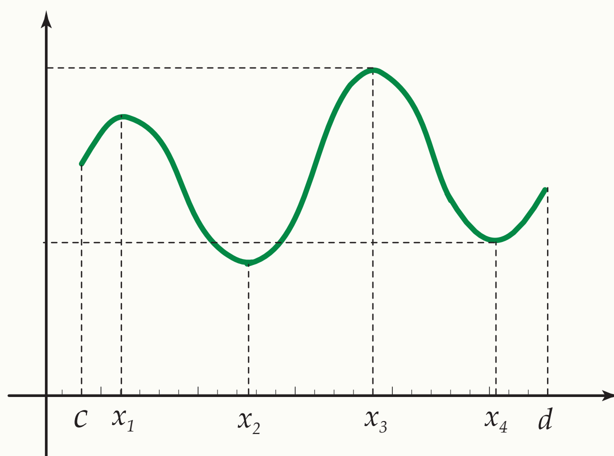
Si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces $f(c)$ es el valor máximo de f o máximo absoluto.

Similarmente, $f(c)$ es un valor mínimo relativo de la función f, si existe un intervalo abierto $]a,b[$ tal que $a < c < b$ y $f(c) \leq f(x)$ para $x \in]a,b[$, con x en el dominio de f.

Si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces se dice que $f(c)$ es el valor mínimo de dicha función. También se llama mínimo absoluto.

Ejemplo 3.4

Considere una función f definida en un intervalo $]c,d[$, cuya representación gráfica es la siguiente:



Note que $f(x_1)$, es un máximo relativo y $f(x_3)$ es el máximo valor que toma la función en el intervalo en que está definida. Similarmente, $f(x_4)$ es un valor mínimo relativo y $f(x_2)$ es el mínimo absoluto de la función en $]c,d[$.

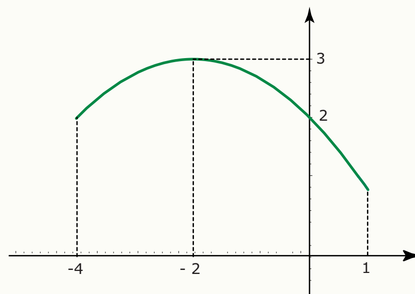
Teorema 3.2

Sea c un punto interior del dominio de una función f. Si $f(c)$ es un valor máximo relativo de f y si existe $f'(c)$ entonces $f'(c) = 0$.

Ejemplo 3.5

Considere la función f definida por $f:[-4,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{-1}{4}(x^2+4x-8)$

Su representación gráfica es la siguiente:



Puede observarse que cuando x toma el valor de -2 entonces la función tiene un valor máximo. En este caso $(-2,3)$ es precisamente el vértice de la parábola con ecuación: $y = \frac{-1}{4}(x^2+4x-8)$.

Según el teorema 3.2 debe cumplirse que $f'(-2)$ sea igual a cero.

En efecto, como $f'(x) = \frac{-1}{4}(2x+4)$, al sustituir x por -2 se obtiene que $f'(-2) = \frac{-1}{4}(-4+4) = 0$, que era lo que quería comprobarse.

Teorema 3.3

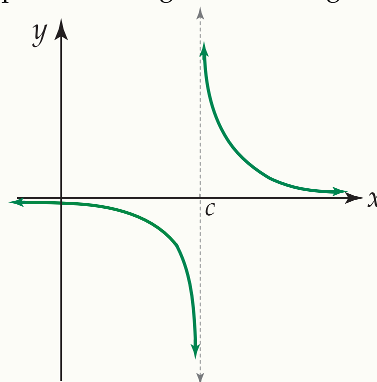
Sea c un punto interior del dominio de una función f. Si $f(c)$ es un valor mínimo relativo de f y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Ejemplo 3.6

Considere la función f definida por $f:[1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 7$.

Note que la función f tiene un valor mínimo en $x = 3$ dado por $f(3) = -2$. El punto $(3,-2)$ es el vértice de la parábola con ecuación $y = x^2 - 6x + 7$. De acuerdo con el teorema 3.3 debe cumplirse que $f'(3)$ sea igual a cero. Como $f'(x) = 2x - 6$ entonces $f'(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$ y se verifica lo enunciado respecto al valor mínimo.

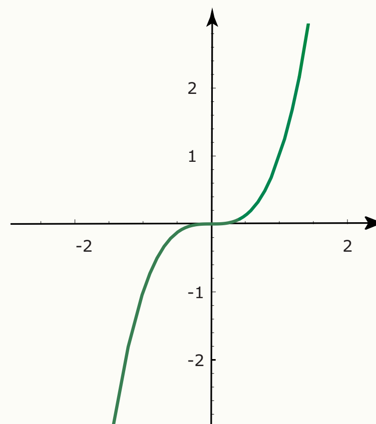
Su representación gráfica es la siguiente:



Observación: El recíproco de los teoremas 3.2 y 3.3 anteriores no es cierto. Es decir, el hecho de que $f'(c)$ sea igual a cero, no implica que en $x = c$ exista un máximo o un mínimo.

Ejemplo 3.7

Para la función f con ecuación $f(x) = x^3$, se tiene que $f'(x) = 3x^2$, y $f'(x) = 0$ si $x = 0$; sin embargo, en $x = 0$ no hay ni un valor máximo ni un valor mínimo, como puede observarse en la representación gráfica de la función.



Definición 3.1

Sea f una función. Recibe el nombre de valores críticos del dominio de f, aquellos en los que $f'(x)$ es igual a cero o en los que $f'(x)$ no existe.

Ejemplo 3.8

Determinemos los valores críticos de las funciones con ecuaciones:

a. $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

Solución:

a. Como $f(x) = 2x^2 - x^4$, entonces $f'(x) = 4x - 4x^3$ Ahora: $f'(x) = 0$ si y solo si $4x(1 - x^2) = 0$ o sea si $x = 0$, ó, $x = 1$, ó, $x = -1$ Luego, los valores críticos de f son: $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$.

b. Como $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ Luego $f'(x) = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^3}}$, de donde $f'(x) = 0$ si y solo si $x + 1 = 0$, o sea, si $x = -1$ Por lo tanto el valor crítico de f es $x = -1$. Note que aunque $f'(x)$ se indefine en $x = 0$, como este valor no pertenece al dominio de f, entonces no es valor crítico de dicha función.

Observación: Reciben el nombre de valores extremos de una función f los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de f. Dada una función f cuyo dominio es el intervalo K, un valor $c \in K$ será un valor crítico de x para la función f si:

a. $f'(c) = 0$ ó

b. $f'(x)$ no existe ó

c. c es un extremo del intervalo K.

En este último caso, si $K = [a,b]$ entonces "a" y "b" son valores críticos. Si $K = [a,b[$ o si $K = [a,+\infty[$ entonces "a" es un valor crítico. Si $K =]a,b[$, o si $K =]-\infty,b]$ entonces "b" es un valor crítico. Si $K =]a,b[$, entonces ni "a" ni "b" son valores críticos (note que los valores extremos de un intervalo abierto no son elementos del intervalo).

3.3 Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y los míinimos de una función

En el siguiente teorema se establece cómo determinar los valores máximos y los valores mínimos de una función, al estudiar los intervalos en que crece o decrece la función.

Teorema 3.4

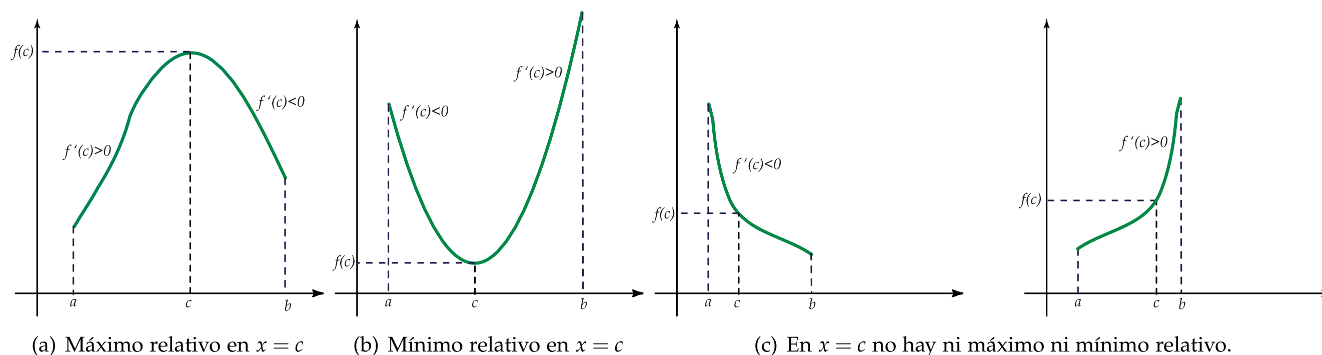
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, que es derivable en todo punto del intervalo abierto $]a,b[$. Sea c en $]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

a. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y negativa para todo $x > c$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo de $f(x)$.

b. Si $f'(x)$ es negativa para toda $x < c$, y positiva para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de $f(x)$.

c. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y también lo es para todo $x > c$; o si $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y a su vez para todo $x > c$, entonces $f(c)$ no es un valor máximo relativo ni un valor mínimo relativo de $f(x)$.

Las situaciones enunciadas en 3.4 a.), 3.4 b.) y 3.4 c.) pueden representarse gráficamente como sigue:



(a) Máximo relativo en $x = c$ (b) Mínimo relativo en $x = c$ (c) En $x = c$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

En los siguientes ejemplos determinaremos los valores extremos de una función cuya ecuación se da. Para ello, se calcula la primera derivada de la función, luego se determinan los valores críticos y por último se aplica el teorema 3.4.

Ejemplo 3.9

$f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

Note que f está definida para $x \in \mathbb{R}$

Como $f'(x) = 4 - x^2$ entonces $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 2$, ó $x = -2$.

Los valores críticos son $x = 2$, y , $x = -2$.

Determinemos ahora cuándo $f'(x) > 0$ y cuándo $f'(x) < 0$.

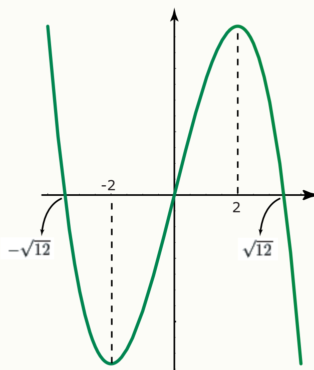
Como $f'(x) = (2-x)(2+x)$, se deben resolver las desigualdades: $(2-x)(2+x) > 0$, $(2-x)(2+x) < 0$. Nos ayudamos con la tabla siguiente:

	$-\infty$ 2	2	2 $+\infty$
$2-x$	$+$	$+$	$-$
$2+x$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Como $f'(x) < 0$ para $x \in]-\infty, -2[$ y $f'(x) > 0$ para $x \in [-2, 2]$ entonces $f(-2)$ es un valor mínimo.

Como $f'(x) > 0$ para $x \in]-2, 2[$ y $f'(x) < 0$ para $x \in]2, +\infty[$ entonces $f(2)$ es un valor máximo.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



Note que $f(-2) = \frac{-16}{3}$ es un mínimo relativo y que $f(2) = \frac{16}{3}$ es un máximo relativo, en el dominio de la función.

Ejemplo 3.10

$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}\ (x+1)^3;\ x \in\ [-1,1]$

En este caso $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(11x-7)}{3\sqrt[3]{x-1}}$ (¡Compruébelo!)

Luego, $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{7}{11}$, ó, $x = -1$

Además, $f'(x)$ no existe si $x = 1$.

Los valores críticos de f son $x = \dfrac{7}{11}$, $x = 1$, $x = -1$.

Como $(x+1)^2$ es positivo para todo $x \in\ [-1,1]$ entonces para determinar cuando $f'(x) > 0$, y cuando $f'(x) < 0$, basta con analizar la expresión $\dfrac{11x-7}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Utilizamos la siguiente tabla:

	-1 a $\frac{11}{7}$	$\frac{11}{7}$ a 1
$11x-7$	$-$	$+$
$\sqrt[3]{x-1}$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

i. Como $f'(x) > 0$ para $x \in \left]-1, \dfrac{11}{7}\right[$ y como f es continua sobre ese intervalo, entonces $f(x)$ es creciente sobre $\left]-1, \dfrac{11}{7}\right[$ por lo que $f(-1) \leq f(x)$ si $x \in \left[-1, \dfrac{11}{7}\right[$.

   Por lo tanto $f(-1) = 0$ en un valor mínimo relativo de f.

ii. Como $f'(x) > 0$ para $x \in \left]-1, \dfrac{11}{7}\right[$ y $f'(x) < 0$ para $x \in \left]\dfrac{11}{7}, 1\right[$, entonces $f\left(\dfrac{1}{7}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{16}{49}}.\left(\dfrac{18}{7}\right)^3$ es un valor máximo relativo de f.

iii. Como $f'(x) < 0$ si $x \in \left]\dfrac{11}{7}, 1\right[$ y como f es continua sobre $\left]\dfrac{11}{7}, 1\right]$ entonces f es decreciente sobre $\left]\dfrac{11}{7}, 1\right]$, y por tanto $f(1) \leq f(x)$ cuando $x \in \left]\dfrac{11}{7}, 1\right]$. Luego $f(1) = 0$ es un valor mínimo relativo de f.

Ejemplo 3.11

$f(x) = \dfrac{x^3 + 8x}{\sqrt{x^2+4}}, \quad x \in [-2,2].$

Se tiene que $f'(x) = \dfrac{x^3 + 8x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ (¡Compruébelo!)

Ahora, $f'(x) = 0$ si y solo si $x(x^2+8) = 0$ es decir, si $x = 0$.

Los valores críticos de f son $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$, estos últimos por ser extremos del intervalo.

Como $f'(x) = \dfrac{x(x^2+8)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, y, x^2+4, x^2+8, y, $\sqrt{x^2+4}$ son expresiones positivas para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces el signo de $f'(x)$ estará determinado por la variación de x.

Luego se tiene:

	-2	0	2
x	$-$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

i. Como $f'(x) < 0$ para $x \in]-2,0]$ y f es continua en $[-2,0[$ entonces f es decreciente sobre $[-2,0[$. Luego $f(-2) \geq f(x)$ para $x \in [-2,0[$, y $f(-2) = \sqrt{2}$ es un máximo relativo de f.

ii. Como $f'(x) < 0$ para $x \in]-2,0[$ y $f'(x) > 0$ para $x \in]0,2[$, entonces $f(0) = 0$ es un mínimo relativo de f.

iii. Como $f'(x) > 0$ para $x \in]0,2]$ y f es continua en $]0,2]$ entonces f es creciente en $]0,2]$. Luego $f(2) \geq f(x)$ para $x \in]0,2]$ y $f(2) = \sqrt{2}$ es un máximo relativo de f.

EJERCICIOS

3.1 Hacer un estudio similar para las funciones

a) $f(x) = x^2 - 6x^2 + 12x - 8$

b) $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}, x \in [-2,2]$

c) $h(x) = x\sqrt{5-x^2}; |x| < \sqrt{5}$

3.4 Concavidad y puntos de inflexión

La segunda derivada de una función también proporciona información sobre el comportamiento de ésta. Para iniciar este estudio daremos la siguiente:

Definición 3.2 Definición de concavidad

Se dice que la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo A, $(A \subseteq D_f)$, si $f'(x)$ es creciente sobre A. Si $f'(x)$ es decreciente sobre A entonces se dice que la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

Note que es la función derivada f' la que debe ser creciente o decreciente en el intervalo A. En la siguiente representación gráfica, una función f es cóncava hacia arriba en el intervalo $]a,b[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]b,c[$

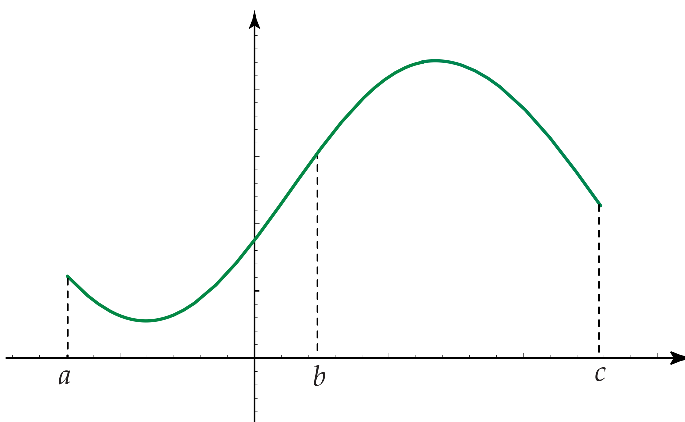


Figura 3.2

Teorema 3.5

Si f es una función tal que $f''(x) > 0$ cuando $x \in]a,b[$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $]a,b[$.

Si $f''(x) > 0$ y como $f''(x) = D_x f'(x)$, entonces se tiene que $f'(x)$ es creciente sobre $]a,b[$ por lo que de acuerdo con la definición 3.2 (concavidad de una función), se obtiene que f es cóncava hacia arriba sobre $]a,b[$.

Teorema 3.6

Si f es una función tal que $f''(x) < 0$ cuando $x \in]a,b[$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre $]a,b[$.

De la hipótesis: $f''(x) < 0$, y como $f''(x)_x = D_x f'(x)$, se obtiene que $f'(x)$ es decreciente sobre $]a,b[$ por lo que según la definición 3.2, la gráfica de la función f es cóncava hacia abajo sobre $]a,b[$.

Ejemplo 3.12

Ejemplifiquemos los teoremas 3.5 y 3.6 utilizando la función f con ecuación $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3}$

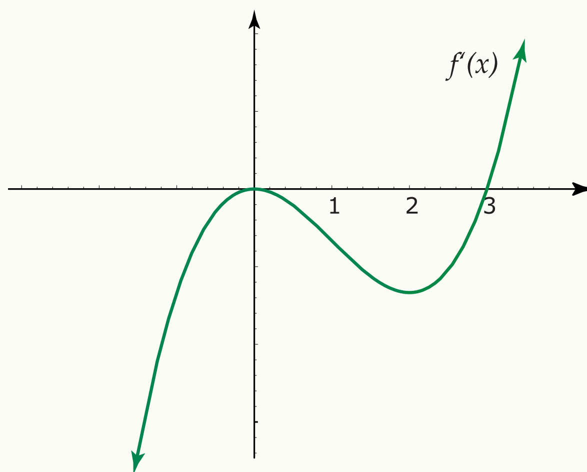
Si $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3}$ entonces $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$, y, $f''(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

Luego, $f''(x) > 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y, $f''(x) < 0$ si $x \in]0, 2[$.

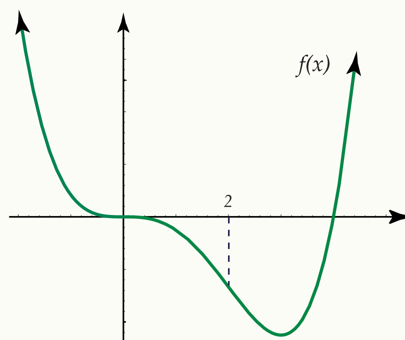
Como $f''(x) = D_x f'(x)$, entonces f' es creciente en los intervalos $]-\infty, 0[$, $]2, +\infty[$, pues en ellos $f''(x)$ es positiva. Además f' es decreciente en el intervalo $]0, 2[$ pues en el $f''(x)$ es negativa.

Luego, f es cóncava hacia arriba en el intervalo $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]0, 2[$.

La representación gráfica de la función f' es la siguiente:



Observe que f' es creciente en $]-\infty, 0[$ y $]2, +\infty[$ y decreciente en $]0, 2[$.
Representación gráfica de la funcón f:



Note que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-\infty, 0[$, $]2, +\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]0, 2[$.

Damos ahora la:

Definición 3.3 Definición de punto de inflexión

Se dice que $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de una función f, si existe un intervalo $]a, b[$ tal que $x_0 \in]a, b[$, y la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $]a, x_0[$, y cóncava hacia abajo sobre $]x_0, b[$, o viceversa.

Podemos representar lo anterior en forma gráfica como sigue:

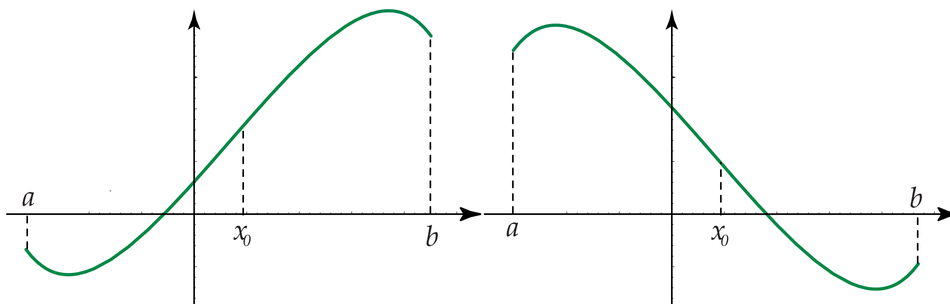
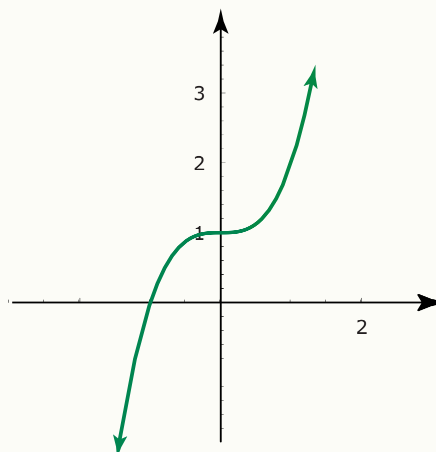


Figura 3.3

Ejemplo 3.13

1. El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de la curva con ecuación $f(x) = x^3 + 1$, pues $f''(x) = 6x$ es positiva si $x > 0$, y negativa si $x < 0$, de donde f es cóncava hacia arriba para $x > 0$, y cóncava hacia abajo para $x < 0$. Gráficamente se tiene:



Ejemplo 3.13 (continuación).

2. Determinemos los puntos de inflexión de la función f con ecuación $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + 1$ Se tiene que $f'(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ por lo que $f''(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$
   Resolvamos las desigualdades $f''(x) > 0, f''(x) < 0$

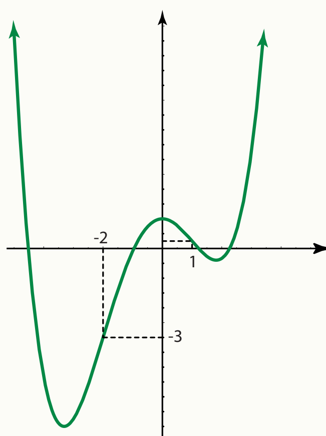
	$-\infty$ -2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x) = (x-1)(x+2)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

   Como $f''(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en esos intervalos.

   La gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo $]-2, 1[$ pues en él $f''(x) < 0$.

   Luego los puntos $(-2, -3)$ y $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ son puntos en los que cambia la concavidad y por tanto son puntos de inflexión.

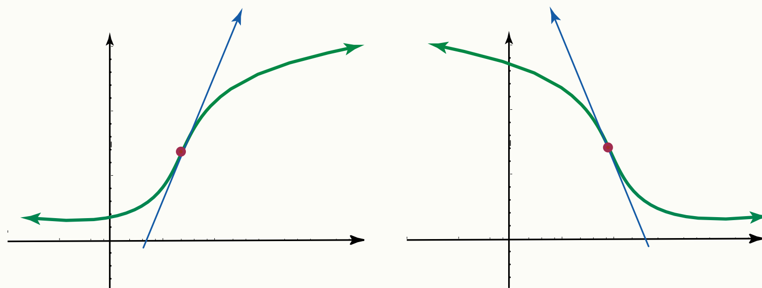
La gráfica de la función f es la siguiente:



Ejemplo 3.13 (continuación).

Puede decirse que un punto de inflexión separa una parte de la curva que es cóncava hacia arriba de otra sección de la misma que es cóncava hacia abajo. En un punto de inflexión, la tangente a la curva recibe el nombre de tangente de inflexión.

Gráficamente:



Observe que una parte de la curva queda sobre la tangente de inflexión, y otra parte bajo ella.

Teorema 3.7

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y si $f''(x_0)$ existe, entonces $f''(x_0) = 0$

Demostración: (Al final del capítulo).

Ejemplo 3.14

Considere la función f con ecuación $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

La segunda derivada de f es $f''(x) = 6x + 2$.

Note que $f''(x) > 0$ si $x > \dfrac{-1}{3}$, y, $f''(x) < 0$ si $x < \dfrac{-1}{3}$

Luego, f es cóncava hacia arriba para $x > \dfrac{-1}{3}$, y cóncava hacia abajo para $x < \dfrac{-1}{3}$

Se tiene entonces que $\left(\dfrac{-1}{3}, f\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right)$ es un punto de inflexión.

Evaluando la segunda derivada de f en $x = \dfrac{-1}{3}$ resulta que $f''\left(\dfrac{-1}{3}\right) = 0$ con lo que se verifica lo expresado en el teorema 3.7.

En el siguiente teorema se dan las condiciones para que un punto sea punto de inflexión.

Teorema 3.8

Si:

i. f es una función continua sobre un intervalo I,

ii. x_0 es un punto interior de I tal que $f''(x_0) = 0$, ó $f''(x_0)$ existe, y

iii. Si existe un intervalo $]a, b[$ con $x_0 \in]a, b[$, $(]a, b[\in I)$ tal que:

- $f''(x) > 0$ cuando $x \in]a, x_0[$ y $f''(x) < 0$ cuando $x \in]x_0, b[$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- $f''(x) < 0$ cuando $x \in]a, x_0[$ y $f''(x) > 0$ cuando $x \in]x_0, b[$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- $f''(x) > 0$ cuando $x \in]a, x_0[$ y $f''(x) > 0$ cuando $x \in]x_0, b[$, o bien, $f''(x) < 0$ cuando $x \in]a, x_0[$ y $f''(x) < 0$ cuando $x \in]x_0, b]$ entonces $(x_0, f(x_0))$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

Demostración: Es similar a la dada para el teorema 3.4, sustituyendo f por f', y f' por f''.

Ejemplo 3.15

Sea f una función con ecuación $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + x$ con $x \in \mathbb{R}$. Note que f es una función continua en todo su dominio por ser una función polinomial. La segunda derivada de f es $f''(x) = x^2 + x - 2$, que es igual a cero si y solo si $x = 1$ ó $x = -2$.

Así $f''(-2) = f''(1) = 0$

Observemos la solución de las desigualdades $f''(x) > 0$, y $f''(x) < 0$ por medio de la siguiente tabla:

	$-\infty$ -2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Como $f''(x) > 0$ para $x \in]-\infty, -2[$ y $f''(x) < 0$ para $x \in]-2, 1[$ entonces $(-2, f(-2))$ es un punto de inflexión según el punto $i.$ del teorema 3.8.

De acuerdo con el punto $ii.$ del teorema 3.8, como $f'(x) < 0$ para $x \in]-2, 1[$ y $f''(x) > 0$ para $x \in]1, +\infty[$, entonces $(1, f(1))$ es un punto de inflexión.

Ejemplo 3.16

Consideraremos ahora la función g con ecuación: $g(x) = \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$, con $x \geq 1$

Como $f''(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ se tiene que $f''(x)$ nunca se hace cero y que $f''(1)$ no existe.

Además $f''(x)$ es mayor que cero para $x \in \,]1,+\infty[$, por lo que f siempre es cóncava hacia arriba en su dominio, y por lo tanto $(1, f(1))$ no es punto de inflexión.

3.5 Criterio de la segunda derivada

Además de proporcionar información sobre la concavidad de la gráfica de una función, la segunda derivada permite establecer si un punto crítico es un valor máximo o un valor mínimo.

El siguiente teorema se refiere a este segundo aspecto.

Teorema 3.9

Sea f una función con dominio D. Si $f'(x)$ está definida para $x \in \,]a,b[$ donde $]a,b[\subset D$ y si $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in \,]a,b[$ entonces:

a. $f(x_0)$ es un valor máximo relativo de f si se cumple que $f''(x_0) < 0$

b. $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de f si se cumple que $f''(x_0) > 0$

Utilizando el teorema 3.9 vamos a determinar los valores máximos y los valores mínimos de las algunas funciones

Ejemplo 3.17

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $x \in \,]-4,2[$

Note que la función f no está definida en $x = -1$

La derivada de f está dada por $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$

Los valores críticos de f se obtienen cuando $f'(x) = 0$. En este caso, $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, ó $x = -2$.

Ahora, la segunda derivada de f es $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

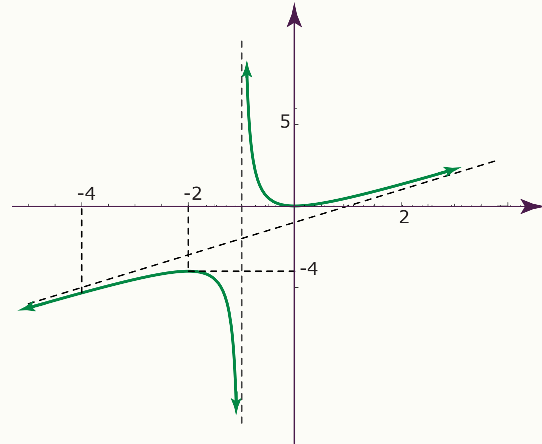
Vamos a evaluar $f''(x)$ en $x = 0$ y en $x = -2$

Ejemplo 3.17 (continuación).

a. $f''(0) = 2$; como $2 > 0$ entonces $f(0)$ es un valor mínimo relativo de f.

b. $f''(-2) = -2$; como $-2 < 0$ entonces $f(-2)$ es un valor máximo relativo de f.

Gráficamente se tiene en el intervalo $]-4,2[$



Ejemplo 3.18

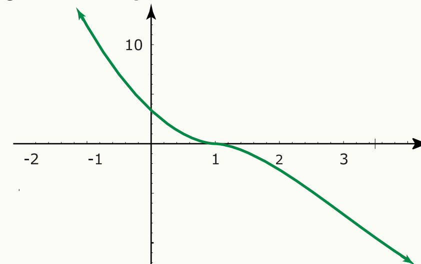
$g(x) = \dfrac{3}{8}(x-9)(x-1)^{5/3}$

Se tiene que $D_g = \mathbb{R}$

La primera derivada de g está dada por $g'(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$

Como $g'(x) = 0$ cuando $x = 1$ y cuando $x = 6$ entonces estos son los valores críticos de g.

El gráfico de g se muestra a continuación.



La segunda derivada de g es $g''(x) = \dfrac{5(x-3)}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Evaluando $g''(x)$ en $x = 6$ se tiene que $g''(6) = \sqrt[3]{35}$ que es mayor que cero, por lo que $g(6)$ es un valor mínimo relativo de g.

Observe que g'' no puede evaluarse en $x = 1$ pues hace cero el denominador por lo que para este valor crítico debe utilizarse el criterio de la primera derivada.

Analizando $g'(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$ se obtiene que $g'(x) < 0$ para $x \in \ ]-\infty,1[$ y $g'(x) < 0$ para $x \in \ ]1,6[$ por lo que al no existir cambio de signo resulta que $f(1)$ no es ni máximo ni mínimo.

3.6 Trazo de curvas

La teoría estudiada hasta ahora sobre máximos y mínimos de una función, será aplicada tanto en la resolución de problemas como en el trazo de la gráfica de una curva. Para este último aspecto nos hace falta estudiar las asíntotas de una curva, tema que veremos a continuación para pasar luego al trazo de curvas y por último a la resolución de problemas.

3.7 Asíntotas

Dada una curva con ecuación $y = f(x)$ es necesario estudiar la variación de la función cuando la abscisa y la ordenada de un punto cualquiera de la curva tiende al infinito.

Definición 3.4

Cuando el punto $P(x,y)$ de una curva se desplaza a lo largo de ella, de tal forma que tienda a infinito su distancia al origen, puede suceder que la distancia de P a una recta fija tienda a cero. Esta recta recibe el nombre de asíntota de la curva.

Gráficamente:

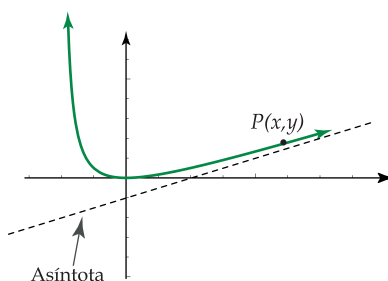


Figura 3.4

Asíntota horizontal:

Definición 3.5

Sea la función con ecuación $y = f(x)$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ó $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces la recta con ecuación $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Ejemplo 3.19

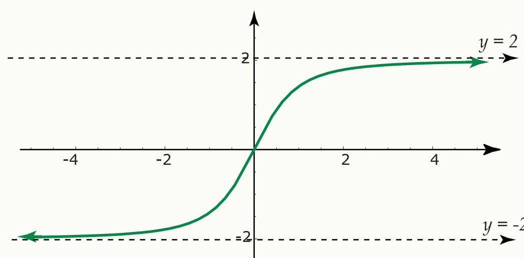
Sea $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ la ecuacióndе una curva.

Como: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2$ entonces la recta con ecuación $y = 2$ es una asíntota horizontal de la curva.

Ejemplo 3.20

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -2$ entonces la recta con ecuación $y = -2$ es una asíntota horizontal de la curva.

Gráficamente se tiene:



Asíntota vertical:

Definición 3.6

La recta con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función con ecuación $y = f(x)$, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i. $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

iv. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

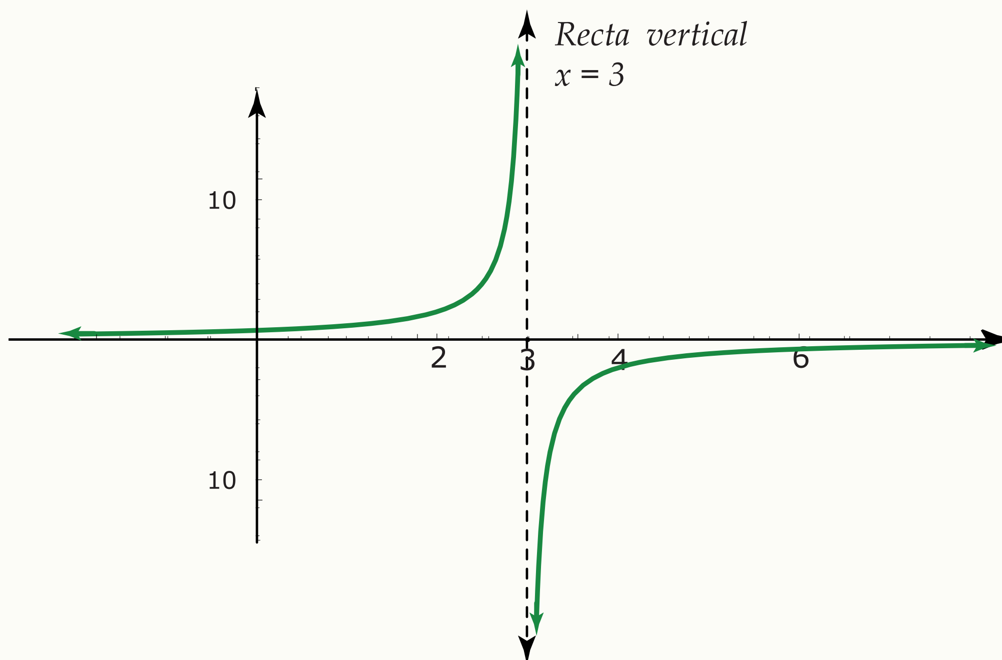
Si la recta con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función f, entonces f es discontinua en "a".

Ejemplo 3.21

Sea $y = \dfrac{2}{3-x}$ la ecuación de una curva. Observe que el dominio es el conjunto: $\mathbb{R} - \{3\}$

Como $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2}{3-x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2}{3-x} = +\infty$ entonces la recta con ecuación $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de la curva.

Gráficamente:



Note que la recta con ecuación $y = 0$, (eje X), es asíntota horizontal de la curva.

Asíntota oblicua:

Definición 3.7

Si los límites: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = b$ existen, entonces la recta con ecuación $y = mx + b$ es una asíntota oblicua.

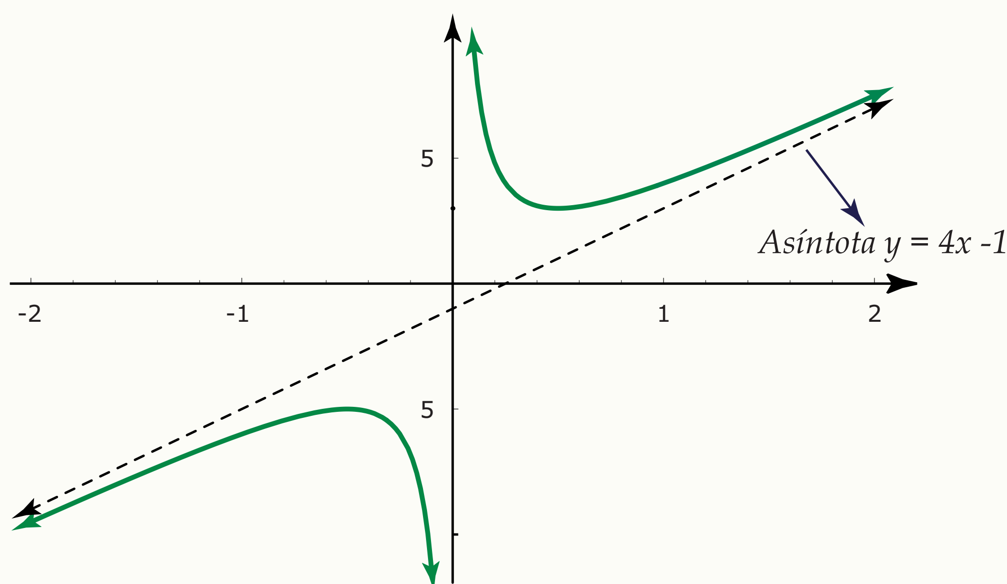
Ejemplo 3.22

La curva con ecuación $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x} - 1$ posee asíntota oblicua pues:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(4 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right) = 4$, de donde $m = 4$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(4x + \dfrac{1}{x} - 1 - 4x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = -1$, de donde $b = -1$

Así la ecuación de la asíntota es $y = 4x - 1$. La representación gráfica es la siguiente:



Note que la recta con ecuación $x = 0$, (eje Y), es asíntota vertical de la curva.

Especificaremos ahora los pasos a seguir para hacer el análisis y la gráfica de una función f cuya ecuación se da.

Calcular el dominio de f. (D_f)

Averiguar las intersecciones con los ejes coordenados: Si $y = f(x)$ es la ecuación de la curva, los puntos de intersección con el eje X se determinan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, los puntos de intersección con el eje Y se calculan dándole a x el valor cero.

Sentido de variación: Se hace el estudio de la primera derivada:

a. Se calcula $f'(x)$

b. Para determinar los valores críticos se resuelve $f'(x) = 0$

c. Para determinar los intervalos en que f crece y en los que decrece se resuelven las desigualdades $f'(x) > 0$, y, $f'(x) < 0$

Estudio de la segunda derivada de f**:** **a.** Se calcula $f''(x)$

b. Se determinan los puntos de inflexión resolviendo $f''(x) = 0$

c. Para determinar los intervalos en que f es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo, se resuelven las desigualdades $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$.

Los puntos máximos y los puntos mínimos se pueden establecer ya sea utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada.

Estudio de los límites: Se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

donde $a \notin D_f$

Estudio de las asíntotas: Se determina si la curva posee asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

Se hace el cuadro de variación: Este es un cuadro en el que se resume todo el análisis anterior.

Gráfica de la función: Con los datos señalados en el cuadro de variación se dibuja la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo 3.23

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

1. **Dominio:** $D_f : \mathbb{R} - \{-1,1\}$

2. **Intersección con los ejes:**

   $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$, luego $(0,0)$ es el punto de intersección con el eje Y, y con el eje X.

3. **Sentido de variación:**

   i. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Como $(x^2-1)^2$ es positivo para $x \in D_f$, basta con analizar el numerador.
   ii. $f'(x) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0$ valor crítico.
   iii. $f'(x) > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0$; luego f crece si $x \in]-\infty,0[$
   iv. $f'(x) < 0 \iff -2x < 0 \iff x > 0$, luego f decrece si $x \in]0,+\infty[$.

   De i. y iv. se deduce que $f(0)$ es un máximo relativo.

4. **Estudio de la segunda derivada:**

   i. $f''(x) = \dfrac{6x^2+2}{(x-1)^3(x+1)^3}$
   ii. $f''(x) \neq 0$ para toda $x \notin D_f$

   Para determinar si f es cóncava hacia arriba o hacia abajo se deben resolver las desigualdades $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para lo que utilizamos la siguiente tabla.

	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Como $f''(x) > 0$ para $x \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$ entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

Como $f''(x) < 0$ para $x \in]-1,1[$ entonces f es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Ejemplo 3.23 (continuación).

5 **Estudio de los límites:**

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$

c. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (x>1 \Longrightarrow x-1>0 \Longrightarrow (x-1)\to 0^+)$

d. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = -\infty \quad (x<1 \Longrightarrow x-1<0 \Longrightarrow (x-1)\to 0^-)$

e. $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (x>-1 \Longrightarrow x+1>0 \Longrightarrow (x+1)\to 0^+)$

f. $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (x<-1 \Longrightarrow x+1<0 \Longrightarrow (x+1)\to 0^-)$

6 **Asíntota:**

De a. y b. del punto anterior, la recta con ecuación $y=1$ es una asíntota horizontal.

Del punto anterior también se obtiene que las rectas con ecuaciones $x=1$, $x=-1$ son asíntotas verticales.

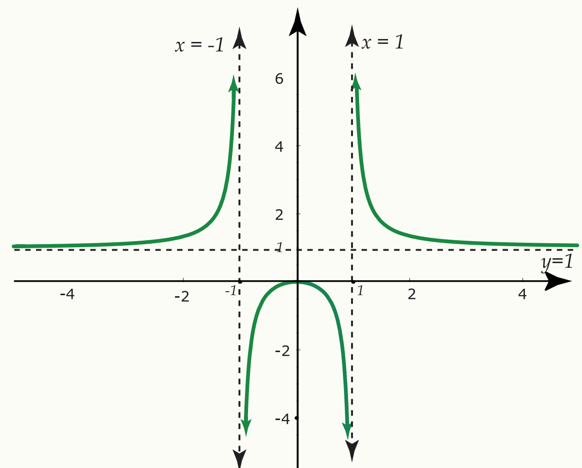
Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{6x} = 0$

pero: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 0.x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ entonces la asíntota oblicua coincide con la asíntota horizontal.

7. **Cuadro de variación:** Resumen de lo estudiado

x	$-\infty$	-1	0	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow\cup+\infty$	$\nearrow\cap-\infty$	$\searrow\cap-\infty$	$\searrow\cup+\infty$	

8. **Representación Gráfica:**



Ejemplo 3.24

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = xe^{1/x}$

1. **Dominio:** $D_f : \mathbb{R} - \{0\}$

2. **Intersección con los ejes:**

   Para que la curva interseque al eje X se necesita que $f(x) = 0$, pero esto sucede únicamente si $xe^{1/x} = 0$, es decir, si $x = 0$ pero $0 \notin D_f$ por lo que no hay intersección con el eje X.

   Para la intersección con el eje Y, x debe ser igual a cero, pero $0 \notin D_f$, por lo que tampoco hay intersección con el eje Y.

3. **Sentido de variación:** Estudio de la primera derivada,

   a. $f'(x) = e^{1/x}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

   b. $f'(x) = 0 \iff x = 1$

   c. Para determinar los intervalos en que crece o decrece la función debemos resolver $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$.

   Como $e^{\frac{1}{x}}$ es mayor que cero para $x \in D_f$, basta analizar el comportamiento de $\dfrac{x-1}{x}$. Para ello utilizamos el siguiente cuadro.

	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   Como $f'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ entonces f crece en ese intervalo.

   Como $f'(x) < 0$ para $x \in]0, 1[$ entonces f decrece en ese intervalo. Además en $(1, f(1))$, hay un mínimo relativo.

4. **Estudio de la segunda derivada**

   a. $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^3}$

   b. $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x \in D_f$

   c. $f''(x) > 0 \iff x^3 > 0 \iff x > 0$, luego f es cóncava hacia arriba si $x > 0$

   d. $f''(x) < 0 \iff x^3 < 0 \iff x < 0$, luego f es cóncava hacia abajo si $x < 0$

Ejemplo 3.24 (continuación).

5 **Estudio de los límites**

a. $\lim_{x\to 0^+} x\, e^{1/x}$ (forma $0.\infty$)

Si $x \to 0^+$ entonces $\frac{1}{x} \to +\infty$ y $e^{1/x} \to +\infty$, por lo que:

$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$ (forma $\frac{\infty}{\infty}$ por lo que puede aplicarse la Regla de L'Hôpital)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b. $\lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{1/x} = 0$, pues si $x \to 0^-$ entonces $\frac{1}{x} \to -\infty$ y $e^{1/x} \to 0 \quad x \to 0^-$

c. $\lim_{x\to +\infty} x \cdot e^{1/x} = +\infty$

Si $x \to +\infty$ entonces $\frac{1}{x} \to 0$ y $e^{1/x} \to 1$

d. $\lim_{x\to -\infty} x \cdot e^{1/x} = -\infty$, pues $\frac{1}{x} \to 0$ y $e^{1/x} \to 1$

6 **Asíntotas**

Existe asíntota vertical dada por la recta con ecuación $x = 0$, por el resultado del límite a.

No hay asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua:

i. $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\, e^{1/x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ de donde $m = 1$

ii. $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} x\, e^{1/x} - x = \lim_{x\to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}}$ (forma $\frac{0}{0}$ por lo que puede aplicarse la Regla de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1, \text{ de donde } b = 1$$

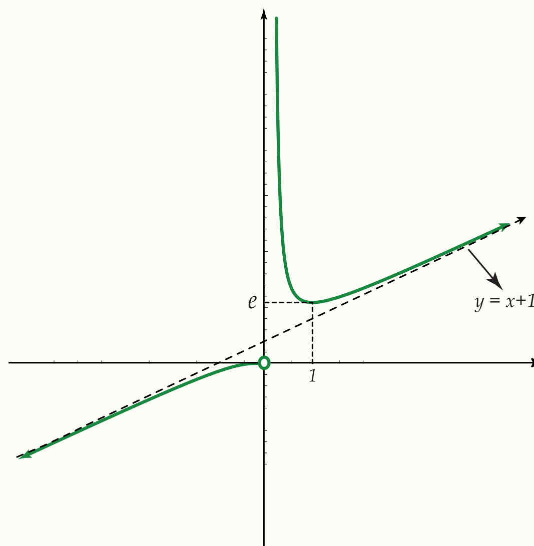
Por tanto, la recta con ecuación $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Ejemplo 3.24 (continuación).

7 **Cuadro de variación:** Resumen de lo anterior.

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow\cap -\infty$	$\searrow\cup +\infty$	$\nearrow\cup +\infty$

8 **Gráfica:**



Ejemplo 3.25

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

1. **Dominio:** $D_f : \mathbb{R} - \{0\}$
2. **Intersección con los ejes**
   a. eje Y: no hay intersección, pues x debe tomar el valor de cero, pero $0 \notin D_f$
   b. eje X: $f(x) = 0 \iff x + \dfrac{4}{x} = 0 \iff \dfrac{x^2+4}{x} = 0$, pero $x^2 + 4 \neq 0 \ \forall x \in D_f$, por lo que no hay intersección con este eje.

Ejemplo 3.25 (continuación).

3. **Sentido de variación: Estudio de la primera derivada**

   a. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

   b. $f'(x) = 0 \iff \dfrac{x^2-4}{x^2} = 0 \iff x = 2$ ó $x = -2$, estos son los valores críticos de f

   c. Como:

$-\infty$	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   Se tiene que $f'(x) > 0$ si $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ $f'(x) < 0$ si $x \in]-2,2[$

   Entonces f es creciente si $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ y f es decreciente si $x \in]-2,2[$

   Luego, $f(-2)$, es un valor máximo y $f(2)$ es un valor mínimo.

4. **Estudio de la segunda derivada:**

   a. $f''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

   b. $f''(x) \neq 0\ \forall x \in D_f$

   c. $f''(x) > 0 \iff x^3 > 0 \iff x > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba si $x > 0$

   d. $f''(x) < 0 \iff x^3 < 0 \iff x < 0$; luego, f es cóncava hacia abajo si $x < 0$

5 **Estudio de los límites:**

   a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \dfrac{4}{x}\right) = +\infty$

   b. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x + \dfrac{4}{x}\right) = -\infty$

   c. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \dfrac{4}{x}\right) = +\infty$

   d. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x + \dfrac{4}{x}\right) = -\infty$

6 **Asíntotas**

   De a. y b. del punto anterior se concluye que la recta con ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical.

   De c. y d. del punto anterior se concluye que no existe asíntota horizontal.

Ejemplo 3.25 (continuación).

Asíntota oblicua

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = 1$ de donde $m = 1$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{4}{x} - x$

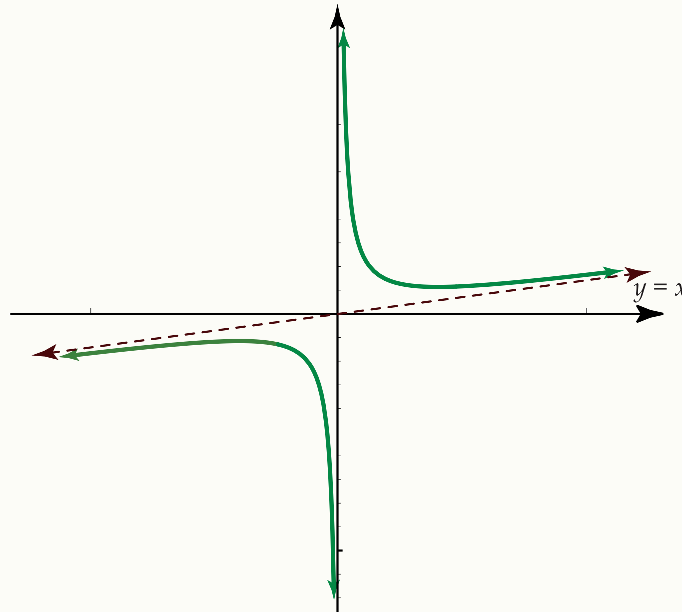
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ de donde $b = 0$

Luego, la recta con ecuación $y = x$ es una asíntota oblicua.

7 **Cuadro de variación**

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow \cap -\infty$	$\searrow \cap -\infty$	$\searrow \cup +\infty$	$\nearrow \cup +\infty$

8 **Gráfica**



Ejemplo 3.26

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación
$f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

1. **Dominio**

   Se necesita: $x^2 - 4 > 0$ lo cual se cumple cuando $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

2. **Intersección con los ejes:**

   Eje X: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$, luego en el punto $(0,0)$ interseca al eje X.

   Como $f(0) = 0$ también en $(0,0)$ interseca al eje Y.

3. **Sentido de variación o estudio de la primera derivada**

   a. $f'(x) = \dfrac{x(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$ (¡Compruébelo!)

   Como $(x^2-4)^{\frac{3}{2}}$ es positivo para $x \in D_f$, analizamos únicamente el numerador para determinar $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$

   $-\infty \quad -\sqrt{8} \quad 0 \quad \sqrt{8} \quad +\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 2\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 2\sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

   Como $f'(x)$ es mayor que cero para $x \in]8, 0[\cup]8, +\infty[$ entonces f es creciente en esos intervalos.

   Como $f'(x)$ es menor que cero para $x \in]-\infty, -\sqrt{8}[\cup]0, \sqrt{8}[$ entonces f es decreciente en esos intervalos.

   Además en $(-\sqrt{8}, f(-\sqrt{8}))$ y $(\sqrt{8}, f(\sqrt{8}))$ hay dos valores mínimos relativos.

4. **Estudio de la segunda derivada**

   a. $f''(x) = \dfrac{4x^2+32}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}$

   b. $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in D_f$ y $f''(x) > 0 \ \forall x \in D_f$ por lo que f siempre es cóncava hacia arriba.

Ejemplo 3.26 (continuación).

5 **Estudio de los límites**

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \; x\to -2^- \implies x<-2 \implies x^2>4 \implies x^2-4>0 \implies x^2-4\to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \; x\to 2^+ \implies x>2 \implies x^2>4 \implies x^2-4>0 \implies x^2-4\to 0^+$

6 **Asíntotas**

Del punto a. anterior se obtiene que no hay asíntota horizontal.

Del punto b. anterior se obtiene que $x=-2$ y $x=2$ son las ecuaciones de asíntotas verticales.

Determinemos si existen asíntotas oblicuas:

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}$

   $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = 1$ de donde $m=1$

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$

   $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x\sqrt{x^2-4}}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-x^2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}(x^2+x\sqrt{x^2-4})}$

   $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}(x^2+x\sqrt{x^2-4})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\; x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}$

   $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\;\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)} = 0$, de donde $b=0$.

   La recta con ecuación $y=x$ es una asíntota oblicua.

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}$

   $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$ de donde $m=-1$

Ejemplo 3.26 (continuación).

b. $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{x^2-x\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}\;(x^2-x\sqrt{x^2-4})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\;x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\;\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}=0\text{, de donde } b=0.$$

Luego, la recta con ecuación $y=-x$ es otra asíntota oblicua.

7 **Cuadro de variación:**

$-\infty$ ... $-\sqrt{8}$ ... -2 | 2 ... $\sqrt{8}$ ... $+\infty$

	$(-\infty,-\sqrt{8})$	$(-\sqrt{8},-2)$	$(2,\sqrt{8})$	$(\sqrt{8},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ ∪	↗ ∪ $+\infty$	↘ ∪ $+\infty$	↗ ∪ $+\infty$

3.8 Resolución de problemas de máximos y mínimos:

En la resolución de problemas en que se debe determinar el máximo o el mínimo de una cierta expresión, deben seguirse los siguientes pasos:

- Determinar la magnitud que debe hacerse máxima o mínima, y asignarle una letra.
- Hacer un dibujo cuando sea necesario.
- Asignar una letra a las cantidades mencionadas en el problema y escribir una ecuación en la que se establezca lo que se debe hacer máximo o mínimo.
- Establecer las condiciones auxiliares del problema y formar una ecuación (ecuación auxiliar)

- Expresar la cantidad que debe maximizarse o minimizarse en termininos de una sola variable utilizando para ello la ecuación auxiliar. Determinar el dominio de esta función.

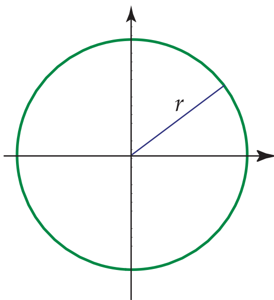
- Obtener la primera derivada de esta función para determinar los valores críticos.

- Comprobar, utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada, si los valores críticos son máximos o mínimos.

- Verificar que el valor obtenido cumple las condiciones dadas en el problema.

- Responder a la pregunta establecida en el enunciado del problema.

En algunos problemas hay que utilizar diversas figuras geométricas por lo que a continuación se especifican algunas de ellas junto con las respectivas fórmulas sobre áreas y volúmenes:

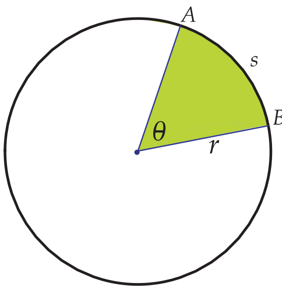


Círculo de radio r con centro en $(0,0)$

Ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$

Circunferencia: $2\pi r$

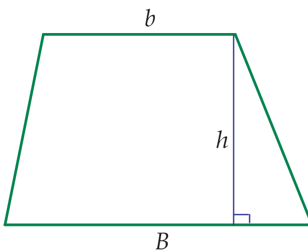
Área: πr^2



Sector circular;

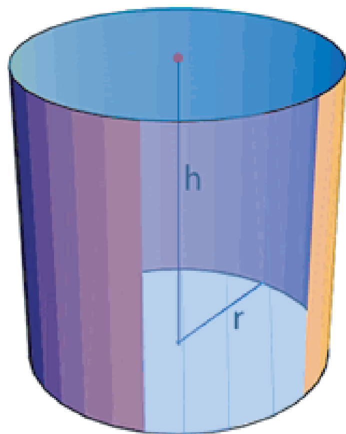
Área: $\dfrac{1}{2}r^2$
θ donde θ es el ángulo central medio en radianes.

Área: $\dfrac{rs}{2}$ donde s es la longitud del arco AB



Trapecio

Área: $\dfrac{(B+b)}{2} \cdot h$, donde B es la longitud de la base mayor, b es la de la base menor y h es la altura del trapecio.

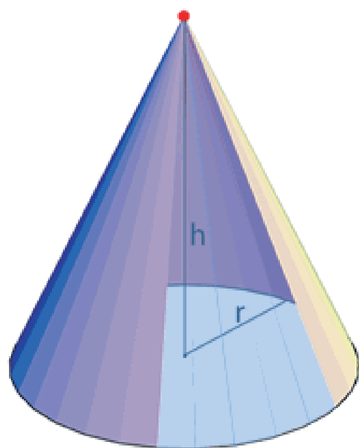


Cilindro circular recto de altura h y radio de la base r.

Volumen: $\pi r^2 h$

Area lateral: $2\pi rh$

Area total: $2\pi rh + 2\pi r^2$

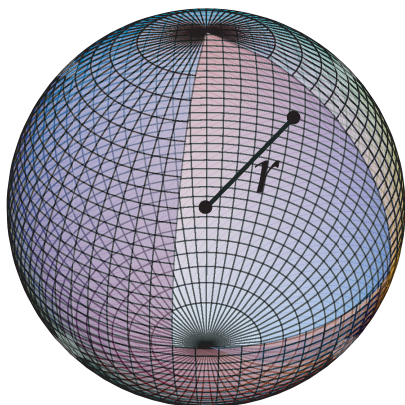


Cono circular recto de altura h y radio de la base r.

Volumen: $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Superficie lateral: $\pi r L$ donde L es la generatríz está dada por:

$L = \sqrt{r^2 + h^2}$



Esfera de radio r.

Volumen: $\frac{4}{3} r^3 \pi$

Superficie: $4\pi r^2$

Ejemplo 3.27

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.

Solución: Se debe de maximizar el producto P de dos números positivos. Sean estos números: x, y. Luego $P = xy$

Como la suma de esos números es 10, entonces $x + y = 10$ es la ecuación auxiliar, de donde $y = 10 - x$.

Entonces: $P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Se debe de determinar el valor de x que hace máxima la función $P(x)$

Derivando: $P'(x) = 10 - 2x$

Valores críticos: $P'(x) = 0 \iff 10 - 2x = 0 \iff x - 5$

En $x = 5$ se tiene un valor crítico, y se debe estudiar si es un valor mínimo o un valor máximo.

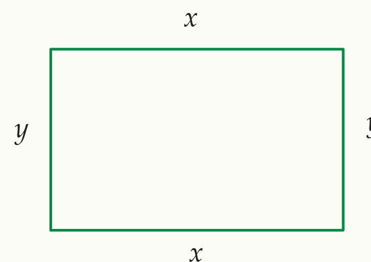
Como $P''(x) = -2$ entonces $P''(x) = -2 < 0$ por lo que en $x = 5$ se tiene un valor máximo.

Si $x = 5$ entonces $y = 10 - 5 = 5$. Luego, los números positivos cuyo producto es máximo y cuya suma es 10 son ambos iguales a 5.

Ejemplo 3.28

Un rectángulo tiene 120 m. de perímetro. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que dan el área máxima?

Solución: Se debe maximizar el área A de un rectángulo: Designemos con "x","y" las longitudes de los lados del rectángulo. Luego $A = xy$.



Como el perímetro del rectángulo es $120m$. entonces la ecuación auxiliar es: $2x + 2y = 120$ de donde $y = 60 - x$.

Luego $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

Como $A'(x) = 60 - 2x$ y $A'(x) = 0 \iff x = 30$ entonces $x = 30$ es un valor crítico.

Analicemos si este valor es máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada.

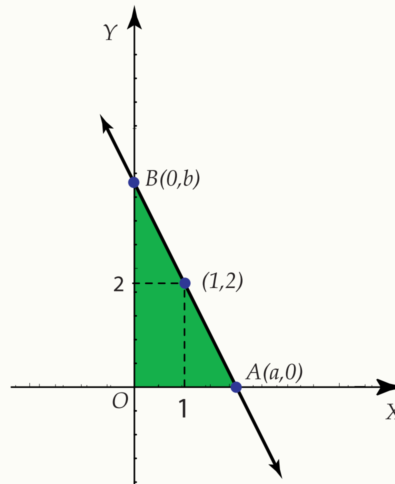
Como $A''(x) = -2x$ y $A''(30) = -2(30) = -60 < 0$, entonces $x = 30$ es un valor máximo.

Si $x = 30$ entonces $y = 30$ por lo que un cuadrado de lado 30 es el rectángulo de mayor área y perímetro $120m$.

Ejemplo 3.29

Una recta variable que pasa por el punto $(1,2)$ corta al eje X en $A(a,0)$ y al eje Y en $B(0,b)$. Hallar el área del triángulo AOB de superficie mínima, suponiendo A y B positivos.

Solución: Se debe minimizar el área T de un triángulo. Gráficamente se tiene:



%endfigure

El triángulo es rectángulo y su área está dada por $T = \dfrac{ab}{2}$

La recta pasa por los puntos $(0,b)$,$(1,2)$ y $(a,0)$, por lo que la pendiente está dada como sigue:

i. Tomando $(0,b)$ y $(1,2)$: $m = \dfrac{2-b}{1-0} = 2-b$

ii. Tomando $(1,2)$ y $(a,0)$: $m = \dfrac{2-0}{1-a} = \dfrac{2}{1-a}$

Luego: $2-b = \dfrac{2}{1-a}$ es la ecuación auxiliar, de donde:

$$b = 2 - \frac{2}{1-a} \tag{3.1}$$

Entonces $T(a) = \dfrac{a}{2}(2 - \dfrac{2}{1-a}) = a - \dfrac{a}{1-a} = \dfrac{a-a^2-a}{1-a} = \dfrac{-a^2}{1-a} = \dfrac{-a^2}{-(a-1)}$ $T(a) = \dfrac{a^2}{a-1}$, $a \neq 1$

Como $T'(a) = \dfrac{a^2-2a}{(a-1)^2} = \dfrac{a(a-2)}{(a-1)^2}$ entonces

$T'(a) = 0 \iff a(a-2) = 0 \iff a = 0$ ó $a = 2$

Ejemplo 3.29 (continuación).

Determinemos, utilizando el criterio de la primera derivada si los valores críticos son máximos o mínimos:

	0 $\quad$ 2	$+\infty$
a	$+$	$+$
$a-2$	$-$	$+$
$T'(a)$	$-$	$+$
$T(a)$	$\searrow$	$\nearrow$

Del cuadro anterior, como T decrece para $a \in]0,2[$ y crece para $a \in]2,+\infty[$ entonces en $a = 2$ se tiene un valor mínimo.

Si $a = 2$ entonces $b = 4$ (al sustituir en 3.1)

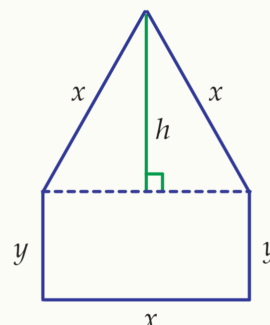
Luego el área del triángulo es $T = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4$

Además, la ecuación de la recta es $y = -2x + 4$

Ejemplo 3.30

Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?

Solución: En este caso se debe maximizar el área de la siguiente figura geométrica: Se han señalado con las letras "x" y "y" las longitudes de los lados de la ventana.



El área de la ventana está dada por la suma de las áreas del triángulo y del rectángulo.

Area del triángulo: $\dfrac{x \cdot h}{2}$

Area del rectángulo: xy

Area total: $A = xy + \dfrac{xh}{2}$

Ejemplo 3.30 (continuación).

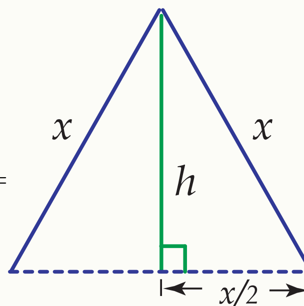
Como el perímetro de la ventana es 3 metros entonces: $2y+3x=3$ de donde $y=\dfrac{3-3x}{2}$ es una ecuación auxiliar.

Luego: $A=x(\dfrac{3-3x}{2})+\dfrac{xh}{2}$. Debemos escribir h también en términos de x.

Se tiene en el triángulo de la derecha. $h^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=x^2$

$h^2=x^2-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{3}{4}x^2$

$h=\dfrac{\sqrt{3}x}{2},\quad h>0$



Luego: $A(x)=\dfrac{1}{2}(3x-3x^2)+\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$A(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ Determinamos los valores críticos $A'(x)=\dfrac{3}{2}-3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

Luego: $A'(x)=0\iff\dfrac{3}{2}-3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=0$

$\iff\dfrac{3}{2}+x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3\right)=0$

$\iff x=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-3}\iff x=\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}$

El valor crítico es $x=\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}$

Utilizando el criterio de la segunda derivada se tiene que

$A''(x)=-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, y , $A''\left(\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3<0$

de donde $x=\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}$ es un valor máximo.

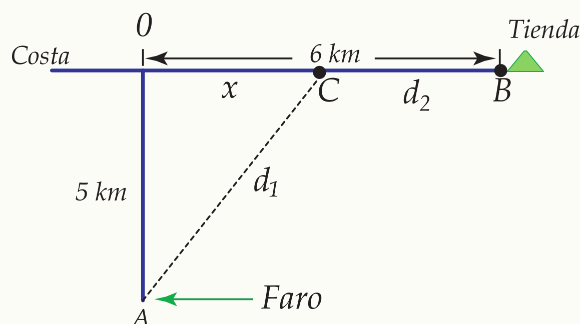
Luego, la longitud de la base del rectángulo debe ser $\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}$ para que la ventana tenga el área máxima.

La altura del rectángulo debe ser: $\dfrac{9-\sqrt{3}}{12-2\sqrt{3}}$ y el lado del triángulo es $\dfrac{3}{6-\sqrt{3}}$.

Ejemplo 3.31

Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 km del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 km de O, hay una tienda. Si el guarda faros puede remar a $2km/h$, y puede cambiar a $4km/h$, ¿Dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

Solución: Se debe minimizar el tiempo de recorrido. Gráficamente la situación se ve en la figura de la derecha.



Sea C el punto de la playa en el que desemboca el guarda faros, designemos con x la distancia OC.

d_1 es la distancia en que debe remar desde A hasta C

d_2 es la distancia en que debe caminar desde C hasta B

Note que $d_1 = \sqrt{25+x^2}$ y $d_2 = 6-x$
Además se tiene que la distancia S recorrida en un tiempo t es igual a la velocidad por el tiempo: o sea;
$S = v \cdot t$ de donde $t = \frac{s}{v}$.

La distancia d_1 es recorrida con una velocidad de $2km/h$, y la distancia d_2 con una velocidad de $4km/h$, por lo que el tiempo total de recorrido será:

$t = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4}$ siendo esta la función a minimizar.

Luego: $t'(x) = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{4x-\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$

Para determinar los valores críticos hacemos $t'(x) = 0$

$$t'(x) = 0 \iff 4x - \sqrt{25+x^2} = 0 \iff 16x^2 = 25 + x^2$$

$$\iff 15x^2 = 25 \iff x^2 = \frac{5}{3} \iff x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

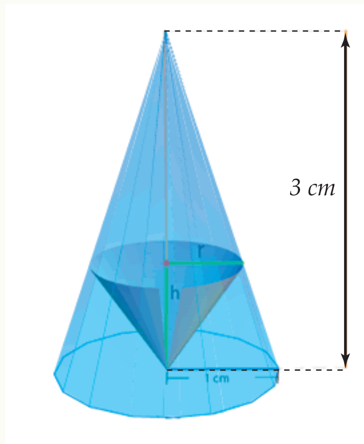
Utilicemos el criterio de la segunda derivada para determinar si el valor crítico es un mínimo.

$t''(x) = \frac{25}{(25+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, evaluando en $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ se obtiene
$t''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{25}{\left(\frac{80}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$ por lo que $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ es un valor mínimo.

Luego, el guardafaros debe desembarcar en un punto C que está a $\sqrt{\frac{5}{3}}$ km de punto C, para llegar a la tienda en el menor tiempo posible.

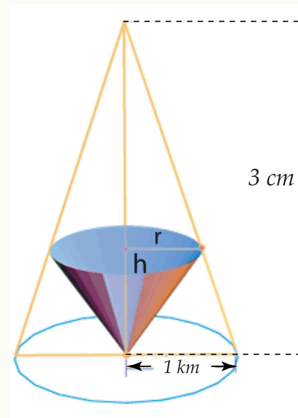
Ejemplo 3.32

Determinar las dimensiones del cono de mayor área lateral que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 1cm y altura 3cm, como se muestra en la figura siguiente:

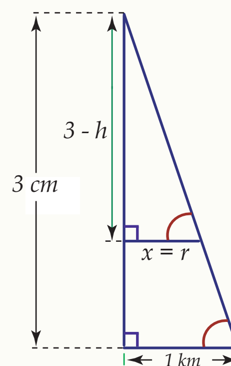


Solución: Hay que maximizar el área lateral del cono inscrito.

Las dimensiones de éste son: x radio de la base, h altura y se especifican en la figura de la siguiente manera:



El área lateral del cono está dada por $A = \pi x L$. Una ecuación auxiliar se puede obtener por medio de semejanza de triángulos de la siguiente forma:



Ejemplo 3.32 (continuación).

Además $L = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(3-3x)^2 + x^2} = \sqrt{10x^2 - 18x + 9}$

Sustituyendo en la ecuación del área lateral $A = \pi x L = x\sqrt{10x^2 - 18x + 9}$

Determinemos los puntos críticos:

$$A'(x) = \pi\sqrt{10x^2 - 18x + 9} + \frac{\pi x(10x-9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}$$

$$A'(x) = \frac{\pi(20x^2 - 27x + 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}} = \frac{\pi(4x-3)(5x-3)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}$$

$$A'(x) = 0 \iff (4x-3)(5x-3) = 0 \iff x = \frac{3}{4},\text{ ó } x = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, los valores críticos son $x = \frac{3}{4}$ y $x = \frac{3}{5}$

Determinemos cuál de esos valores es un valor máximo utilizando el criterio de la primera derivada.

	$-\infty$ a $\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$ a $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ a $+\infty$
$4x-3$	$-$	$-$	$+$
$5x-3$	$-$	$+$	$+$
$A'(x)$	$+$	$-$	$+$
$A(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Como $A(x)$ crece para $x \in \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[$ y decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ entonces $x = \frac{3}{5}$ es un valor máximo.

Como $A(x)$ decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ y crece para $x \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$ entonces $x = \frac{3}{4}$ es un valor mínimo.

Luego el valor que nos interesa es $x = \frac{3}{5}$

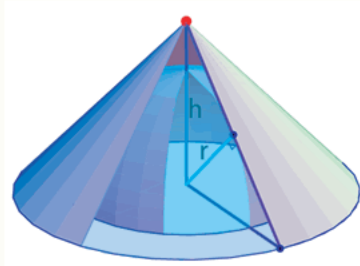
Por lo tanto, el radio de la base del cono inscrito es $x = \frac{3}{5}$ cm, y la altura es $h = \frac{6}{5}$cm.

Ejemplo 3.33

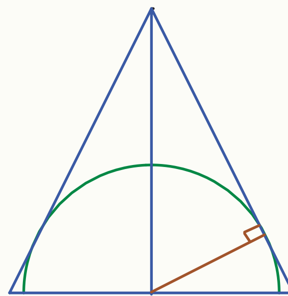
Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una semiesfera de radio R, de tal forma que el plano de la base del cono coincida con el de la semiesfera.

Solución: Hay que minimizar el volumen del cono circunscrito.

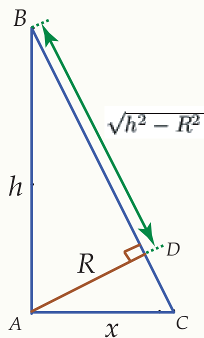
Si el radio de la base del cono es x y su altura es h, su volumen está dado por: $V = \frac{\pi}{3}x^2h$. Gráficamente se tiene:



Haciendo un corte transversal se tiene:



Podemos utilizar semejanza de triángulo para obtener una ecuación auxiliar:



$\triangle ABC \sim \triangle ABD$ $\frac{R}{x} = \frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{h}$

de donde $x = \frac{hR}{\sqrt{h^2 - R^2}}$

Sustituyendo en la ecuación del volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3}x^2h = \frac{\pi}{3}\frac{hR^2}{\sqrt{h^2 - R^2}} \cdot h = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - R^2}$$

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h^2 - 3R^2)}{(h^2 - R^2)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h - \sqrt{3}R)(h + \sqrt{3}R)}{(h^2 - R^2)^2}$$

Ejemplo 3.33 (continuación).

Utilizando el criterio de la primera derivada, analicemos cuál valor crítico corresponde a un valor mínimo:

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}R$	$-\sqrt{3}R$ a 0	0 a $\sqrt{3}R$	$\sqrt{3}R$ a $+\infty$
h^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$h-\sqrt{3}R$	$-$	$-$	$-$	$+$
$h+\sqrt{3}R$	$-$	$+$	$+$	$+$
$V'(h)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$V(h)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Como $V(h)$ decrece para $x \in]0, \sqrt{3}R[$ y crece para $x \in]\sqrt{3}R, +\infty[$ entonces $h = \sqrt{3}R$ corresponde a un valor mínimo que era lo que nos interesaba.

Luego, las dimensiones del cono circunscrito a la esfera son: radio de la base $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ y altura $h = \sqrt{3}R$

4 RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Prof. Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc.
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica.

4.1 Introducción

Se ha estudiado la regla de la cadena para obtener, implícitamente, $\frac{dy}{dt}$ de una función $y = f(t)$. Así, por ejemplo, $\frac{d}{dt}\left(y^n\right) = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dt}$.

Otra aplicación importante de lo anterior es el cálculo de razones de cambio de dos o más variables que cambian con el tiempo; o sea, *¿qué tan rápido varía una cantidad en el tiempo*?

Por ejemplo, suponga que se tiene un recipiente cónico con agua, como el que se muestra en la figura. Cuando el agua **sale del recipiente**, el *volumen* V, el *radio* r y la *altura* h del nivel del agua son, las tres, 3 **funciones que dependen del tiempo t**.

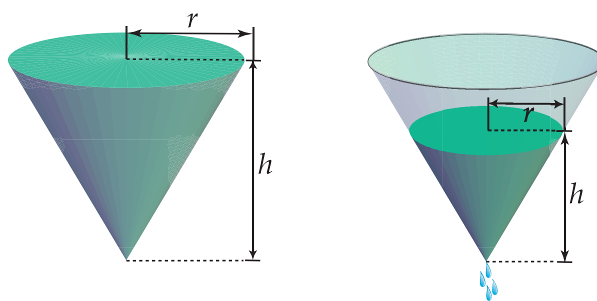


Figura 4.1 Recipiente lleno Recipiente vaciándose

Estas tres variables están relacionadas entre sí, por la ecuación del volumen del cono, a saber:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h \tag{4.1}$$

Por otra parte, **derivando implícitamente** ambos lados de 4.1 respecto del tiempo t, se obtiene la siguiente **ecuación de razones relacionadas**:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right]$$

Se puede observar que la razón de cambio del volumen, está ligada a las razones de cambio de la altura y del radio, en donde:

$\frac{dV}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varía el volumen con respecto al tiempo

$\frac{dr}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varía el radio con respecto al tiempo

$\frac{dh}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varía la altura con respecto al tiempo

Así, por ejemplo, $\frac{dV}{dt} = 10m^3/seg$ significa que el volumen está aumentando $10m^3$ cada segundo; mientras que, $\frac{dV}{dt} = -10m^3/seg$ significa que el volumen está disminuyendo $10m^3$ cada segundo.

4.2 Problemas de Razones Relacionadas

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, en todo problema de **razones relacionadas** o **tasas relacionadas**, se calcula la rapidez con que cambia una cantidad en términos de la razón de cambio de otra(s) cantidad(es).

Estrategia para resolver problemas de razones relacionadas

(1) De ser posible, trazar un diagrama que ilustre la situación planteada.

(2) Designar con símbolos todas las cantidades dadas y las cantidades por determinar que varían con el tiempo.

(3) Analizar el enunciado del problema y distinguir cuáles razones de cambio se conocen y cuál es la razón de cambio que se requiere.

(4) Plantear una ecuación que relacione las variables cuyas razones de cambio están dadas o han de determinarse.

(5) Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos miembros de la ecuación obtenida en 4.1, con respecto al tiempo t, con el fin de obtener la ecuación de razones relacionadas.

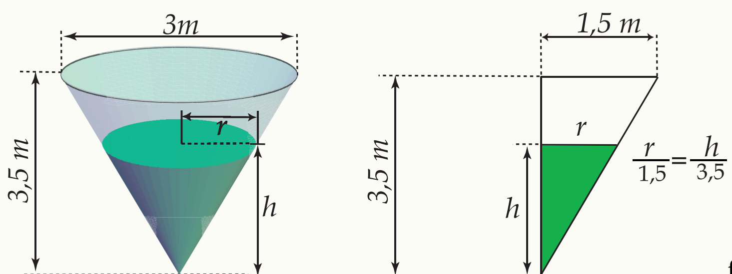
(6) Sustituir en la ecuación resultante del punto (5), todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio, a fin de deducir (despejar) la razón de cambio requerida. Es hasta en este momento, que se hacen las sustituciones de acuerdo con los datos del problema)

Ejemplo 4.1

Un recipiente cónico (con el vértice hacia abajo) tiene 3 metros de ancho arriba y 3,5 metros de hondo. Si el agua fluye hacia el recipiente a razón de 3 metros cúbicos por minuto, encuentre la razón de cambio de la altura del agua cuando tal altura es de 2 metros.

Solución:

Sea V el volumen del recipiente, r el radio de la superficie variable en el instante t y h el nivel del agua en el instante t.



Dato: Rapidez con que aumenta el volumen del agua; o sea, $\dfrac{dV}{dt} = 3m^3/min$.

Encontrar: Rapidez con que sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 2 metros; es decir, $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=2\ m}$

La **ecuación que relaciona las variables** es el volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \tag{4.2}$$

Ahora bien, como el volumen consta de dos variables (r y h), conviene, en este caso, expresarlo únicamente en términos de la altura h, para lo cual se usará la relación que existe entre las variables citadas (Thales); a saber, $r = \dfrac{3}{7} h$.

Sustituyendo en 4.2 se tiene que: $V = \dfrac{\pi}{3} \left(\dfrac{3}{7} h\right)^2 h \implies V = \dfrac{3\pi}{49} h^3$

La **ecuación de razones relacionadas** se obtiene derivando implícitamente, respecto del tiempo, a ambos lados de la ecuación $V = \dfrac{3\pi}{49} h^3$, lo cual nos conduce a:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{49} h^2 \frac{dh}{dt} \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.1 (continuación).

Finalmente, como se desea encontrar la variación de la profundidad del agua en el instante en que $h = 2$, y dado que $\dfrac{dV}{dt} = 3$, sustituimos estos valores en 4.3 para obtener que:

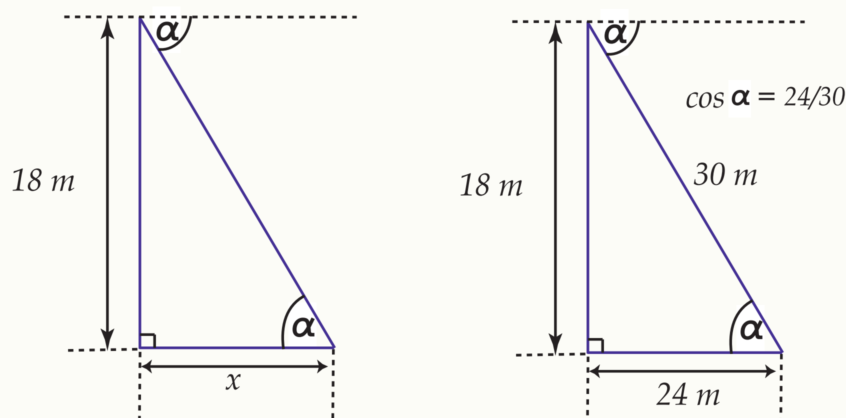
$$3 = \frac{9\pi}{49}(2)^2 \frac{dh}{dt} \iff \frac{dh}{dt} = \frac{3 \cdot 49}{4 \cdot 9\pi} = \frac{49}{12\pi} \iff \frac{dh}{dt} \cong 1{,}2998$$

Por lo tanto, el nivel del agua aumenta a una razón aproximada de $1{,}3\, m/min$.

Ejemplo 4.2

Un hombre se aleja de un edificio de 18 metros de altura, a una velocidad de 1,8 metros por segundo. Una persona en la azotea del edificio observa al hombre alejarse. ¿A qué velocidad varía el ángulo de depresión de la persona en la azotea hacia el hombre, cuando éste dista 24 metros de la base de la torre?

Solución: Sea x la distancia recorrida por el hombre en el instante t. Sea α la medida, en radianes, del ángulo de depresión en el instante t.



Dato: Rapidez con que el hombre se aleja del edificio; o sea, $\dfrac{dx}{dt} = 1{,}8 m/seg$.

Encontrar: Variación del ángulo de depresión cuando el hombre se encuentra a 24 metros de distancia del edificio; es decir, $\left.\dfrac{d\alpha}{dt}\right|_{x=24\ m}$

Ejemplo 4.2 (continuación).

La **ecuación que relaciona las variables** está dada por la razón:

$$\tan\alpha = \frac{18}{x} \tag{4.4}$$

La **ecuación de razones relacionadas** se obtiene derivando implícitamente a ambos lados de 4.4, con respecto del tiempo, lo cual nos conduce a:

$$\left(\sec^2\alpha\right)\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{-18}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} \iff \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{-18\cos^2\alpha}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} \tag{4.5}$$

Finalmente, para determinar la variación del ángulo de depresión en el instante en que $x = 24$, primero se debe calcular el valor para el $\cos\alpha$ en ese mismo instante.
Ahora bien, dado que: $\tan\alpha = \frac{18}{x} \implies \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \implies \cos\alpha = \frac{4}{5}$

Por lo tanto, sustituyendo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\frac{dx}{dt} = 1,8 = \frac{9}{5}$ en 4.5 se obtiene que:

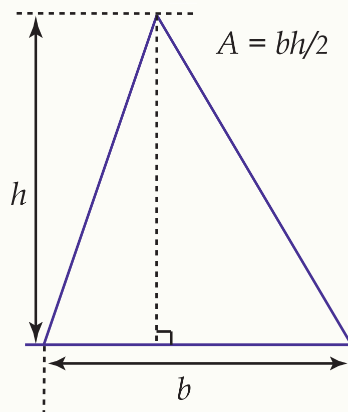
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-18\cdot 16\cdot 9}{24^2\cdot 25\cdot 5} \iff \frac{d\alpha}{dt} = \frac{-9}{250} \iff \frac{d\alpha}{dt} \cong -0,036.$$

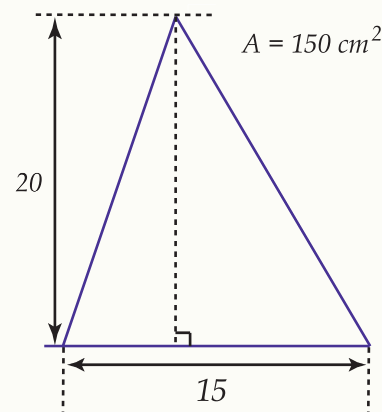
Se concluye que, el ángulo de depresión disminuye a una velocidad de 0,036 radianes cada segundo.

Ejemplo 4.3

La altura de un triángulo disminuye a razón de $2\,cm/min$ mientras que el área del mismo disminuye a razón de $3\,cm^2/min$. ¿A qué ritmo cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a $20\,cm$ y el área es de $150\,cm^2$?

Solución: Sea A el área , b la base y h la altura del triángulo, en el instante t.





Ejemplo 4.3 (continuación).

Datos: Rapidez con que disminuye tanto la altura, como el área del triángulo; es decir,

$\frac{dh}{dt} = -2 cm/min$ y $\frac{dA}{dt} = -3 cm^2/min.$

Determinar: La variación de la base del triángulo cuando la altura mide $20 cm$ y el área es de $150 cm^2$; o sea,

$$\left.\frac{db}{dt}\right|_{A = 150\, cm^2}^{h = 20\, cm}$$

Ecuación que relaciona las variables: Área del triángulo, por lo que:

$$A = \frac{bh}{2} \tag{4.6}$$

Derivando respecto del tiempo, a ambos lados de 4.6, se obtiene que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[b\,\frac{dh}{dt} + h\,\frac{db}{dt}\right] \tag{4.7}$$

De la ecuación 4.7, de acuerdo con los datos que se tienen, se puede observar que para poder encontrar la variación de la base del triángulo en el instante en que $h = 20$ y $A = 150$, falta calcular el valor de b, en ese mismo instante, el cual lo podemos obtener de la ecuación dada en 4.6.

Por lo tanto, como $A = \frac{bh}{2}$, entonces $150 = 10b \iff b = 15 cm.$

La sustitución de $\frac{dA}{dt} = -3$, $\frac{dh}{dt} = -2$, $h = 20$ y $b = 15$ en 4.7, nos conduce a:

$$-3 = \frac{1}{2}\left[15\,(-2) + 20\,\frac{db}{dt}\right] \iff -6 = -30 + 20\,\frac{db}{dt} \iff \frac{db}{dt} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

En conclusión, la base del triángulo aumenta a razón de 1,2 cm/min.

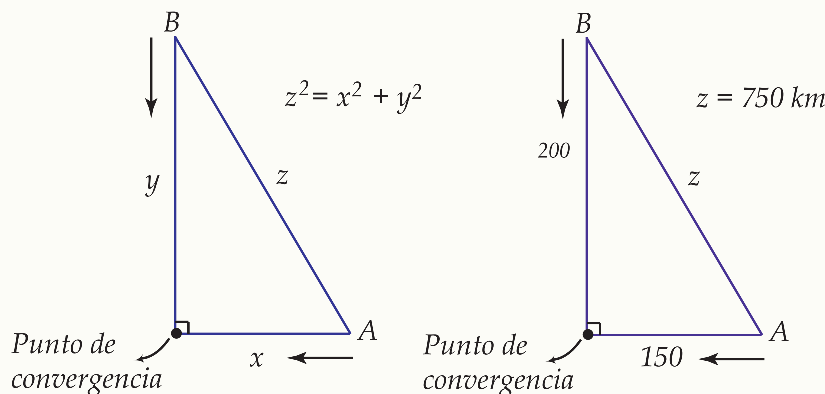
Ejemplo 4.4

Un controlador aéreo sitúa dos aviones (A y B) en la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en ángulo recto. El controlador detecta que el avión A viaja a 450 kilómetros por hora y el avión B, a 600 kilómetros por hora.

a. ¿A qué ritmo varía la distancia entre los dos aviones, cuando A y B están a 150 kilómetros y 200 kilómetros, respectivamente, del punto de convergencia?

b. ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?

Solución: Sea x la distancia recorrida por el avión A, y la distancia recorrida por el avión B y z la distancia entre los dos aviones, en cualquier instante t.



Datos: Velocidad con que los dos aviones se dirigen al punto de convergencia; a saber, $\dfrac{dx}{dt} = -450\,km/hr$ y $\dfrac{dy}{dt} = -600\,km/hr$ (las velocidades son ambas negativas ya que la distancia de los aviones al punto de convergencia disminuye)

Determinar:

(a) La variación de la distancia entre los dos aviones cuando el avión A está a $150\,km$ del punto de convergencia y el avión B está a $200\,km$ de dicho punto; o sea , $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{y=200\,km}^{x=150\,km}$.

(b) El tiempo requerido por el controlador para cambiar la trayectoria de los aviones, con el fin de evitar que éstos colapsen.

Ecuación que relaciona las variables: Por "Pitágoras", se tiene:

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{4.8}$$

Ecuación de razones relacionadas: Derivando implícitamente a ambos lados de 4.8, respecto del tiempo, obtenemos que:

$$z\,\frac{dz}{dt} = x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} \tag{4.9}$$

Ejemplo 4.4 (continuación).

Con base en los datos que se tienen, de la ecuación 4.9 se puede observar que para poder encontrar la variación de la distancia entre los dos aviones, en el instante en que $x = 150$ y $y = 200$, falta calcular, en ese mismo instante, el valor de z, el cual se puede obtener de la ecuación dada en 4.8.

Dado que $z^2 = x^2 + y^2$, entonces $z^2 = (150)^2 + (200)^2 = 62\,500 \iff z = 250\,km$.

La sustitución de $\dfrac{dx}{dt} = -450$, $\dfrac{dy}{dt} = -600$, $x = 150$, $y = 200$ y $z = 250$ en 4.9, nos conduce a:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{150\cdot(-450) + 200\cdot(-600)}{250} \iff \frac{dz}{dt} = -750$$

Respuesta (a): La distancia entre los dos aviones disminuye a razón de $750 km/hr$.

Respuesta (b): El controlador dispone de 20 minutos para cambiar la trayectoria de los aviones puesto que, en ese tiempo, los dos aviones estarían llegando al mismo punto y colapsarían.

Justificación: Usando la relación $d = v\cdot t$, se tiene que:

Para el avión A: $150 = 450\cdot t \iff t = 1/3\,hr$ (20 minutos)

Para el avión B: $200 = 600\cdot t \iff t = 1/3\,hr$ (20 minutos)

EJERCICIOS

4.1 Plantear y resolver los siguientes problemas.

a) Un niño usa una pajilla para beber agua de un vaso cónico (con el vértice hacia abajo) a razón de $3\text{cm}^3/\text{seg}$. Si la altura del vaso es de 10 cm y si el diámetro de la parte superior es de 6 cm, ¿con qué rapidez baja el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 cm? ¿Cuál es la variación del radio en ese mismo instante?

Respuesta: El nivel del agua disminuye a razón de $4/3\pi$ cm/seg y el radio disminuye a razón de $2/5\pi$ cm/seg.

b) La longitud del largo de un rectángulo disminuye a razón de 2 cm/seg, mientras que el ancho aumenta a razón de 2 cm/seg. Cuando el largo es de 12 cm y el ancho de 5 cm, hallar:

a. la variación del área del rectángulo

Respuesta: El área aumenta a razón de 14 cm^2/seg.

b. la variación del perímetro del rectángulo

Respuesta: El perímetro no varía.

c. la variación de las longitudes de las diagonales del rectángulo

Respuesta: Las diagonales disminuyen a razón de 1,08 cm/seg.

c) Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m y el ángulo entre ellos aumenta con una rapidez de 0,06 rad/seg. Calcule la rapidez con que el área y la altura del triángulo se incrementan cuando el ángulo entre los lados es de $\pi/3$.

Respuesta: El área aumenta a razón de 0,30 m^2/seg. La altura aumenta a razón de 0,12 m/seg, cuando la base del triángulo es de 5 m, y a razón de 0,15 m/seg, cuando la base es de 4 m.

d) Una luz está en el suelo a 45 metros de un edificio. Un hombre de 2 metros de estatura camina desde la luz hacia el edificio a razón constante de 2 metros por segundo. ¿A qué velocidad está disminuyendo su sombra sobre el edificio en el instante en que el hombre está a 25 metros del edificio?

Respuesta: La sombra del hombre disminuye a una velocidad de 0,45 m/seg.

e) Un globo está a 100 metros sobre el suelo y se eleva verticalmente a una razón constante de 4 m/seg. Un automóvil pasa por debajo viajando por una carretera recta a razón constante de 60 m/seg. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el globo y el automóvil $^1/_2$ segundo después?

Respuesta: La distancia entre el globo y el auto aumenta a una velocidad de 20,77 m/seg.

f) Considere un depósito de agua en forma de cono invertido. Cuando el depósito se descarga, su volumen disminuye a razón de 50π m^3/min. Si la altura del cono es el triple del radio de su parte superior, ¿con qué rapidez varía el nivel del agua cuando está a 5 m del fondo del depósito?

Respuesta: El nivel del agua disminuye a razón de 18 m/min.

g) Un globo asciende a 5 m/seg desde un punto en el suelo que dista 30 m de un observador. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación cuando el globo está a una altura de 17,32 metros.

Respuesta: El ángulo de elevación aumenta a un ritmo de 0,125 rad/seg.

h) Considere un triángulo rectángulo de catetos a y b. Si el cateto a decrece a razón de 0,5 cm/min y el cateto b crece a razón de 2 cm/min, determine la variación del área del triángulo cuando a mide 16 cm y b mide 12 cm.

Respuesta: El área aumenta a una velocidad de 13 cm^2/min.

i) Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 cm/seg, mientras que los otros dos lados se acortan de tal manera que la figura permanece como rectángulo de área constante igual a 50 cm^2. ¿Cuál es la variación del lado que se acorta y la del perímetro cuando la longitud del lado que aumenta es de 5 cm?

Respuesta: El lado y el perímetro disminuyen, ambos, a razón de 4 cm/seg.

j) Un tanque cónico invertido de 10 m de altura y 3 m de radio en la parte superior, se está llenando con agua a razón constante. ¿A qué velocidad se incrementa el volumen del agua si se sabe que cuando el tanque se ha llenado hasta la mitad de su capacidad, la profundidad del agua está aumentando a razón de un metro

por minuto? ¿Cuánto tiempo tardará el tanque en llenarse?

Respuesta: El volumen aumenta a razón de 17,81 m^3/min. El tanque se llena en 5,29 minutos.

k) Se vierte arena en el suelo a razón de 0,4 m^3 por segundo. La arena forma en el suelo una pila en la forma de un cono cuya altura es igual al radio de la base. ¿A qué velocidad aumenta la altura de la pila 10 segundos después de que se empezó a vertir la arena?

Respuesta: La altura aumenta a una velocidad aproximada de 0,0521 m/seg.

l) Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y su vértice opuesto al origen está sobre la curva de ecuación $y = 2^x$, según se muestra en la figura adjunta. En este vértice, la coordenada y aumenta a razón de una unidad por segundo. ¿Cuál es la variación del área del rectángulo cuando $x = 2$?

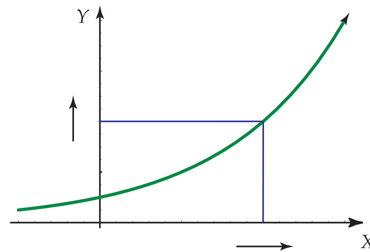


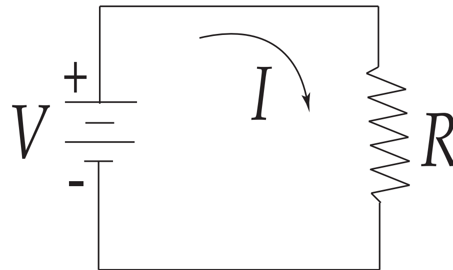
Figura 4.2

Respuesta: El área del rectángulo aumenta a razón de 3,443 unidades cuadradas por seg.

EJERCICIOS[1]

4.2

El voltaje V(en voltios), la intensidad I(en amperios) y la resistencia R(en ohmios) de un circuito eléctrico, como el que se muestra en la figura, se relacionan mediante la ecuación $V = I \cdot R$. Suponga que V aumenta a razón de 1 voltio por segundo, mientras I decrece a razón de 1/3 amperio por segundo. Sea t el tiempo en segundos.



a) ¿Cuál es el valor de dV/dt?

Respuesta: $\frac{dV}{dt} = 1$ voltio/seg

b) ¿Cuál es el valor de dI/dt?

Respuesta: $\frac{dI}{dt} = \frac{-1}{3}$ amperios/seg

[1]Práctica adicional de razones relacionadas (M.Sc. Luis Carrera R., M.Sc. Sharay Meneses R.)

c) ¿Qué ecuación relaciona dR/dt con dV/dt y dI/dt?

Respuesta: $\dfrac{dV}{dt} = I\,\dfrac{dR}{dt} + R\,\dfrac{dI}{dt} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{I}\left[\dfrac{dV}{dt} - R\,\dfrac{dI}{dt}\right]$

d) Halle la razón a la cual R cambia cuando $V = 12$ voltios e $I = 2$ amperios ¿R aumenta o disminuye?

Respuesta: La resistencia aumenta a razón de 1,5 ohmios/seg.

4.3 El radio r y la altura h del cilindro circular recto se relacionan con el volumen del cilindro mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.

a) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dh/dt, si r es constante?

Respuesta: $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$

b) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt, si h es constante?

Respuesta: $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi h r\,\dfrac{dr}{dt}$

c) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt y dh/dt, si ni r ni h son constantes?

Respuesta: $\dfrac{dV}{dt} = \pi\left[r^2 \dfrac{dh}{dt} + 2hr\,\dfrac{dr}{dt}\right]$

d) En cierto instante la altura es de 6 cm y se incrementa en 1 cm/seg, mientras el radio es de 10 cm y disminuye a razón de 1 cm/seg. ¿Con qué rapidez cambia el volumen en ese instante? ¿El volumen aumenta o disminuye en ese instante?

Respuesta: Hallar $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{r=10}^{h} = 6$. El volumen disminuye a razón de 20π cm^3/seg.

4.4 Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0,01 cm/min. ¿Cuál es la razón de cambio del área cuando el radio mide 50 cm?

Respuesta: El área aumenta π cm^2 cada minuto.

4.5 Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito en forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) a razón de 3π m^3 por hora. Si el depósito tiene un radio de 2,5 metros en su parte superior y una profundidad de 10 metros, entonces:

a) ¿Qué tan rápido cambia dicha profundidad cuando tiene 8 metros?

Respuesta: El nivel del aceite aumenta $^3/_4$ de metro cada hora.

b) ¿A qué razón varía el área de la superficie del nivel del aceite en ese mismo instante?

Respuesta: La superficie del nivel del aceite aumenta $\dfrac{3\pi}{4}$ m^2 cada hora.

4.6 Un globo aerostático se infla de tal modo que su volumen está incrementándose a razón de 84,951 dm^3/min ¿Con qué rapidez está incrementándose el diámetro del globo cuando el radio es 3,05 dm?

Respuesta: El diámetro del globo aumenta a razón de 1,45 dm/min, aproximadamente.

4.7 Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando una arista tiene 10 centímetros de longitud?

Respuesta: El volumen del cubo aumenta 900 cm^3 cada segundo.

4.8 De un tubo sale arena a razón de 16 dm^3/seg. Si la arena forma una pirámide cónica en el suelo cuya altura es siempre $1/4$ del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la pirámide cuando tiene 4 dm de altura?

Respuesta: La altura de la pirámide aumenta, aproximadamente, $0{,}0796\,\text{dm}$ cada segundo.

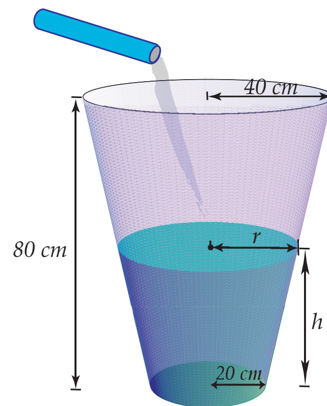
4.9 Una mujer, en un muelle, tira de un bote a razón de 15 metros por minuto sirviéndose de una soga amarrada al bote al nivel del agua. Si las manos de la mujer se hallan a 4,8 metros por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidez el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6 metros?

Respuesta: El bote se aproxima al muelle con una velocidad de 25 m/min.

4.10 Se bombea agua a un tanque que tiene forma de cono truncado circular recto con una razón uniforme de 2 litros por minuto (1 litro = 1000 cm^3). El tanque tiene una altura de 80 cm y radios inferior y superior de 20 y 40 cm, respectivamente. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 30 cm?

Nota: El volumen V de un cono truncado circular recto de altitud h y radios inferior y superior a y b es:

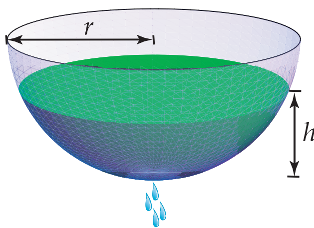
$$V = \frac{\pi}{3}\, h\, (a^2 + ab + b^2)$$



Respuesta: El nivel del agua sube con una rapidez aproximada de $0{,}8418\,\text{cm}$ cada minuto.

4.11 El agua está goteando del fondo de un depósito semiesférico de 8 dm de radio a razón de 2 $dm^3/hora$. Si el depósito estaba lleno en cierto momento, ¿con qué rapidez baja el nivel del agua cuando la altura es de 3 dm?

Nota: El volumen V de un casquete de altura h de una esfera de radio r es: $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$.



Respuesta: El nivel del agua baja a razón de $0{,}016\,\text{dm/seg}$, aproximadamente.

4.12 Una escalera de 4 metros se apoya contra una casa y su base comienza a resbalar. Cuando la base está a 3,7 metros de la casa, la base se aleja a razón de 1,5 m/seg.

a) ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante?

Respuesta: La distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera disminuye a razón de 3,65 m/seg.

b) ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese instante?

Respuesta: El área del triángulo decrece a una velocidad de $5{,}613\,m^2/\text{seg}$.

c) ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante?

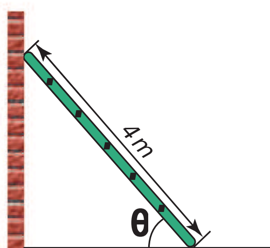


Figura 4.3

Respuesta: El ángulo decrece a razón de $0{,}9869\,\text{rad/seg}$, aproximadamente.

4.13 Si Angélica mide 1,80 metros de altura y se aleja de la luz de un poste del alumbrado público, que está a 9 metros de altura, a razón de 0,6 metros por segundo, entonces:

a) ¿Con qué rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Angélica está a 7,2 metros del poste? ¿A 9 metros?

Respuesta: La longitud de la sombra crece a razón constante de 0,15 m/seg.

b) ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra?

Respuesta: El extremo de la sombra se mueve a razón constante de $0{,}75\,\text{m/seg}$.

c) Para seguir el extremo de su sombra, ¿a qué razón angular debe alzar la cabeza cuando su sombra mide 1,8 metros de largo?

Respuesta: Para seguir el extremo de la sombra, se debe alzar la cabeza a una razón angular de 0,042 radianes cada segundo.

4.14 Un automóvil que se desplaza a razón de 9 m/seg , se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 36 metros de la intersección, un camión que viaja a razón de 12 m/seg , cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2 segundos después de que el camión pasa dicho cruce?

Respuesta: El automóvil y el camión se separan con una rapidez de $4{,}2\,\text{m/seg}$.

4.15 Un avión vuela con velocidad constante, a una altura de 3000 m, en una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador advierte que el ángulo de elevación del aeroplano es de $\pi/3$ radianes y aumenta a razón de $1/60$ radianes por segundo. Determine la velocidad del avión.

Respuesta: El avión viaja a una velocidad de 66,67 m/seg. La velocidad es negativa pues la distancia horizontal entre el avión y el observador disminuye; de igual forma, la distancia del avión al observador en tierra, también disminuye)

4.16 Una partícula se está moviendo sobre una curva cuya ecuación es $\dfrac{xy^3}{1+y^2} = \dfrac{8}{5}$. Suponga que la coordenada x se está incrementando a razón de 6 unidades/seg cuando la partícula está en el punto $(1,2)$.

a) ¿Con qué rapidez está cambiando la coordenada y del punto en ese instante?

Respuesta: La coordenada y disminuye a razón de $8{,}57$ unidades/seg.

b) ¿La partícula está ascendiendo o descendiendo en ese instante?

Respuesta: El ese instante, la partícula está disminuyendo.

5 INTEGRAL INDEFINIDA

5.1 Integral Indefinida

Dada una función f, una primitiva arbitraria de ésta se denomina generalmente integral indefinida de f y se escribe en la forma $\int f(x)\,dx$.

La primitiva de una función también recibe el nombre de antiderivada.

Si λ es una función tal que $\lambda'(x) = f(x)$ para x en un intervalo I, entonces la integral indefinida de $f(x)$ está dada por:

$$\int f(x)\,dx = \lambda(x) + C$$

C es cualquier número real y recibe el nombre de constante de integración.

Teorema 5.1

Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la función f sobre un intervalo $[a,b]$, entonces

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

es decir, su diferencia es igual a una constante.

Puede decirse a partir del teorema 5.1 que si se conoce cualquier función primitiva de F de la función f, entonces cualquier otra primitiva de f tiene la forma $F(x) + C$, donde C es una constante. Luego

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ si } F'(x) = f(x)$$

Nos dedicaremos ahora a estudiar los métodos que permiten determinar las funciones primitivas, (y por tanto las integrales indefinidas), de ciertas clases de funciones elementales.

El proceso que permite determinar la función primitiva de una función f recibe el nombre de "integración de la función f".

Las propiedades estudiadas para la integral definida también se cumplen para la integral indefinida.

5.2 Fórmulas y métodos de integración

5.2.1 Regla de la cadena para la antiderivación

Sea g una función derivable en un intervalo I.

Sea f una función definida en I y H una antiderivada de f en I. Entonces:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = H[g(x)] + C$$

Note que $D_x[H(g(x)) + C] = H'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = H'(g(x)) \cdot g'(x)$, como H es una primitiva de f entonces $H'(x) = f(x)$ por lo que:

$$H'[g(x)] \cdot g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

Luego tenemos que:

1. $\displaystyle\int [g(x)]^n \cdot g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$ ¡Compruébelo!

2. $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ x \neq 1,$ ¡Compruébelo!

El caso en que $n = -1$ será estudiado luego.

Ejemplo 5.1

$$\int x\, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2}$$

Ejemplo 5.2

$$\int 4x^5\, dx = 4\int x^5\, dx = a\frac{x^6}{6} + C = \frac{2x^6}{3} + C$$

Ejemplo 5.3

$$\int x^{\frac{-3}{7}}\,dx = \frac{x^{\frac{-3}{7}+1}}{\frac{-3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}x^{\frac{4}{7}} + C$$

Ejemplo 5.4

$$\int (2x+1)^5\,dx$$

Note que $D_x(2x+1) = 2,$ por lo que es necesario multiplicar por 2 y $\frac{1}{2}$ de la siguiente manera:

$$\int (2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)^6}{6} + C = \frac{(2x+1)^6}{12} + C$$

Ejemplo 5.5

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x}{\sqrt{3x^2+4}}\,dx &= 5\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}, \quad \text{Note que } D_x(3x^2+4) = 6x \\
&= \frac{5}{6}\int 6x(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}}\,dx \\
&= \frac{5}{6}\cdot\frac{(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{5}{3}\sqrt{3x^2+4} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

$$\begin{aligned}
\int (2+y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}}dy &= \frac{1}{2}\cdot\int 2(2+y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}}dy \quad \text{Note que} \quad d_y(4y+y^2+5) = 2(y+2) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\int (4+2y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}}dy \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(4y+y^2+5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\
&= \tfrac{3}{8}(4y+y^2+5)^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.1 $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^2}}\,dx,\ \ x>0$

5.2 $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\sqrt[5]{x}}\,dx$

5.3 $\displaystyle\int (4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x^5})\,dx$

5.4 $\displaystyle\int 5u(3+2u^3)^{\frac{2}{3}}\,du$

5.5 $\displaystyle\int \frac{7(1+5x)}{\sqrt[3]{2x+5x^2+4}}\,dx$

5.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-2x}},\ \ x<\frac{3}{2}$

5.2.2 Integral de la función exponencial de base e

Recuerde que $D_x e^x = e^x$ y que $D_x\left[e^{g(x)}\right] = e^{g(x)}\cdot g'(x)$

Luego $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ y $\displaystyle\int e^{g(x)}\cdot g'(x) = e^{g(x)} + C$

Ejemplo 5.7

$$\int e^{2x}\,dx$$

En este caso $D_x(2x)=2,$ por lo que multiplicamos y dividimos por 2 para tener la integral completa.

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} + C$$

Ejemplo 5.8

$$\int 5xe^{3x^2}\,dx$$

Note que $D_x(3x^2)=6x$

$$\int 5xe^{3x^2}\,dx = 5\cdot\frac{1}{6}\int 6x\cdot e^{3x^2}\,dx = \frac{5}{5}\,e^{3x^2} + C$$

Ejemplo 5.9

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Note que $D_x(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + C$$

Ejemplo 5.10

$$\int \frac{e^{arctan\ x}}{1+x^2}\,dx$$

Recuerde que $D_x\,(arctan\ x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{e^{arctan\ x}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\ e^{arctan\ x}\ dx = e^{arctan\ x} + C$$

EJERCICIOS

5.7 $\displaystyle\int \frac{4x}{e^{5x^2}}\,dx$

5.8 $\displaystyle\int e^x(2+3e^x)^5\,dx$

5.9 $\displaystyle\int \frac{e^(3+\ln x)}{x}\,dx$

5.10 $\displaystyle\int x(e^{4x^2} - x + 1)\,dx$

5.11 $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2\ x}\,dx$

5.12 $\displaystyle\int \frac{e^2}{\sqrt{4-6e^x}}\,dx$

5.2.3 Integral de la función exponencial de base "a" $(a > 0, a \neq 1)$

Como $D_x(a^x) = a^x \ln\ a$ entonces:

$$\int a^x \ln\ a\ dx = a^x + C \quad \text{y} \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln\ a} + C$$

Ejemplo 5.11

$$\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int 2^x \ln 2\; dx = \frac{2x}{\ln 2} + C$$

Ejemplo 5.12

$$\int x\,3^{4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int 8x\,3^{4x^2}\,dx = \frac{3^{4x^2}}{8} + C$$

Ejemplo 5.13

$$\int (2t+1)\,5^{t^2+t+4}dt$$

$$\begin{aligned}\int (2t+1)\,5^{t^2+t+4}dt &= \frac{1}{\ln 5}\int (2t+1)\,t^{(t^2+t+4)}\ \ln t\,dt\\ &= \frac{1}{\ln 5}\,5^{(t^2+t+4)} + C\end{aligned}$$

5.2.4 Integral que da como resultado la función logaritmo natural

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \tag{5.1}$$

Prueba:

Si $x > 0$ entonces $|x| = x$,y,$\ln|x| = \ln x$ por lo que:

$$D_x(\ln|x|) = D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$,y,$\ln|x| = \ln(-x)$ por lo que:

$$D_x(\ln|x|) = D_x(\ln(-x)) = \frac{1}{-x}\cdot -1 = \frac{1}{x}$$

De esta manera queda comprobado la igualdad dada en 5.1.

En general se tiene que

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\,|f(x)| + C$$

Observe que la expresión en el denominador debe tener exponente uno y que además en el integrando debe aparecer la derivada de f.

Ejemplo 5.14

$\int \frac{3}{x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\,|x| + C$

Ejemplo 5.15

$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\,|x^2+1| + C$

Ejemplo 5.16

$\int \frac{-4x+1}{4x^2-2x+5}\,dx$

Note que $D_x(4x^2-2x+5) = 8x-2$

$$\begin{aligned}
\int \frac{-4x+1}{4x^2-2x+5}\,dx &= \frac{-1}{2}\int \frac{-2(-4x+1)}{4x^2-2x+5}\,dx \\
&= \tfrac{-1}{2}\int \tfrac{8x-2}{4x^2-2x+5}\,dx \\
&= \frac{-1}{2}\ln\,|4x^2-2x+5| + C
\end{aligned}$$

Nota: Cuando en un cociente, la variable de la expresión en el numerador tiene exponente mayor o igual al de la variable en el denominador, debe efectuarse primero una división y luego integrar como se especifica en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 5.17

$$\int \frac{3y}{y+5}\,dy = \int \left(3 - \frac{15}{y+5}\right)\,dy = \int 3\,dy - 15\int \frac{dy}{y+5} = 3y - 15\,\ln\,|y+5|\,+C$$

Ejemplo 5.18

$$\begin{aligned}\int \frac{4y^2}{2y+5}\,dy &= \int \left(2y - \frac{5}{2} + \frac{\frac{25}{2}}{2y+5}\right)\,dy \\ &= \int \left(2y - \frac{5}{2}\right)\,dy + \frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2}{2y+5}\,dy \\ &= y^2\, - \frac{5}{2}\,y\, + \frac{25}{4}\,\ln\,|2y+5| + C\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.13 $\displaystyle\int \frac{5y^2+6y}{10y+3}\,dy$

5.2.5 Integrales de las funciones trigonométricas

Se debe tener muy claro cuál es la derivada de cada una de las funciones trigonométricas estudiadas.

Daremos a continuación la lista de las fórmulas:

1. $\displaystyle\int a\,\cos u\,du = a\,\operatorname{sen} u\,+C$

   Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que

$$\int a\,f'(x)\,\cos f(x)\,dx = a\,\operatorname{sen} f(x) + C$$

Ejemplo 5.19

$\displaystyle\int 2x\,\cos x^2\,dx = \operatorname{sen} x^2 + C$. Note que $u = x^2$ y $du = 2x\,dx$

Ejemplo 5.20

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \;= 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\cos\sqrt{x}\;dx = 2\,\operatorname{sen}\sqrt{x} + C.$$

Note que $u = \sqrt{x}$ y $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo 5.21

$$\int 5\,\cos 4x\;dx = \frac{5}{4}\int 4\,\cos 4x\;dx = \frac{5}{4}\,\operatorname{sen} 4x\; + C$$

EJERCICIOS

5.14 $\displaystyle\int e^x \cos\left(2\,e^x + 1\right)\,dx$

5.15 $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln\,x)}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int a\;\operatorname{sen} u\,du = -a\;\cos u\; + C$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$ por lo que

$$\int a\,f'(x)\;\operatorname{sen} f(x)\,dx = -a\;\cos f(x)\; + C$$

Ejemplo 5.22

$$\int 3\,\operatorname{sen} 5x\;dx = \frac{3}{5}\int 5\,\operatorname{sen} 5x\;dx = \frac{-3}{5}\;\cos 5x\; + C$$

Ejemplo 5.23

$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)\ dx$

Note que $u = x^3+4$ y $du = 3x^2\ dx$

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)\ dx &= \frac{1}{3}\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3+4)\ dx \\ &= \frac{-1}{3}\cos(x^3+4)\ + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.24

$\int 4x \operatorname{sen}(4-x^2)\ dx$

$$\begin{aligned} \int 4x \operatorname{sen}(4-x^2)\ dx &= \frac{4}{-2}\int -2x \operatorname{sen}(4-x^2)\ dx, \quad u = 4-x^2 \ \text{ y } \ du = -2x\ dx \\ &= -2\,(-\cos(4-x^2)) + C \\ &= 2\cos(4-x^2) + C \end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.16 $\displaystyle\int \frac{\cos 6x}{\operatorname{sen}(6x)+4}\ dx$

5.17 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(4e^{-x})}{e^x}\ dx$

3. $\displaystyle\int a \tan u\, du = a\int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\ du = -a\int \frac{-\operatorname{sen} u}{\cos u} du = -a\ \ln|\cos x| + C.$

Válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que

$$\int a\, f'(x)\ \tan f(x)\ dx = -a\ \ln|\cos f(x)| + C$$

Ejemplo 5.25

$$\int \tan 6x \; dx = \frac{1}{6} \int 6 \; \tan 6x \; dx = \frac{-1}{6} \; \ln \; |\cos 6x| + C$$

Ejemplo 5.26

$$\int e^x \; \tan e^x \; dx = -\ln \; |\cos e^x| + C, \qquad u = e^x, \, du = e^x \; dx$$

EJERCICIOS

5.18 $\displaystyle\int \frac{\tan \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \; dx$

5.19 $\displaystyle\int \frac{\tan(e^{\text{sen } x})}{\sec x} \; dx$

4. $\displaystyle\int a \cot \, u \, du = a \int \frac{\cos u}{\text{sen } u} \, du = a \; \ln \; |\text{sen } u| + C$

Válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi, \, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que

$$\int a \; f'(x) \; cot \; f(x) \; dx = a \; \ln \; |\text{sen } f(x)| + C$$

Ejemplo 5.27

$$\int x \; \cot(x^2 + 4) \; dx = \frac{1}{2} \int 2x \; \cot(x^2 + 4) \; dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \; |\text{sen}(x^2 + 4)| \; + C$$

Ejemplo 5.28

$$\int \frac{\cot(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \; dx = 2 \int \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \; \cot(\sqrt{x}) \; dx = 2 \; \ln \; |\text{sen}(\sqrt{x})| + C$$

EJERCICIOS

5.20 $\displaystyle\int \frac{\cot(\operatorname{sen} x)}{\sec x}\, dx$

5.21 $\displaystyle\int \frac{\csc^2(2x)}{\cot 2x + 3}\, dx$

5. $\displaystyle\int a \sec^2 u\, du = a \tan u + C$

Válida para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi,\, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que

$$\int a\, f'(x) \sec^2[f(x)]\, dx = a \tan f(x) + C$$

$$\int 2 \sec^2(3x)\, dx = \frac{2}{3}\int 3 \sec^2(3x)\, dx = \frac{2}{3} \tan 3x + C$$

Ejemplo 5.29

$$\int \frac{\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx = -\int \frac{-1}{x^2} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = -\tan\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Ejemplo 5.30

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}\, dx = \tan(\ln x) + C \qquad \text{Si } u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}\, dx$$

EJERCICIOS

5.22 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)}\, dx$

5.23 $\displaystyle\int \frac{\sec^2(\tan x)}{\cos^2 x}\, dx$

6. $\displaystyle\int a \csc^2 u\, du = -a \cot u + C$

Esta fórmula tiene sentido en $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$ y por tanto

$$\int a\, f'(x)\, \csc^2 f(x)\, dx = -a \cot f(x) + C$$

Ejemplo 5.31

$$\int 2x \csc^2(5x^2)\, dx = \frac{1}{5}\int 10 \csc^2(5x^2)\, dx = \frac{-1}{5} \cot(5x^2) + C$$

Ejemplo 5.32

$$\int \frac{dx}{x \operatorname{sen}^2(\ln x)} = \int \frac{1}{x} \csc^2(\ln x)\, dx = -\cot(\ln x) + C$$

Ejemplo 5.33

$$\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \csc^2\sqrt{x}\, dx = -2\cot\sqrt{x} + C$$

Note que si $u = \sqrt{x}$ entonces $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

EJERCICIOS

5.24 $\displaystyle\int \frac{\csc^2(e^{-x})}{e^x}\, dx$

5.25 $\displaystyle\int (3x^2 + x) \csc^2(2x^3 + x^2 + 1)\, dx$

7. $\displaystyle\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

Esta igualdad es válida para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que

$$\int f'(x) \sec[f(x)] \tan[f(x)]\, dx = \sec[f(x)] + C$$

Ejemplo 5.34

$$\int \sec(5x)\,\tan(5x)\,dx = \frac{1}{5}\int \sec(5x)\,\tan(5x)\,dx = \frac{1}{5}\sec(5x) + C$$

Ejemplo 5.35

$$\int e^x\,\sec(e^x)\,\tan(e^x)\,dx = \sec(e^x) + C$$

Ejemplo 5.36

$$\int \frac{x\,\text{sen}(x^2)}{\cos^2(x^2)}\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,\text{sen}(x^2)}{\cos^2(x^2)}\,dx &= \int x\frac{\text{sen}(x^2)}{\cos x^2\,\cos x^2}\,dx \\
&= \int x\,\text{sen}\,x^2\,\tan x^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int 2x\sec(x^2)\tan(x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\sec(x^2) + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.26 $\displaystyle\int \frac{\sec 3x}{\cot 3x}\,dx$

5.27 $\displaystyle\int \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx$

8. $\displaystyle\int \csc u\,\cot u\,du = -\csc u + C$

Esta igualdad vale para $\{u \in \mathbb{R}$ tal que $u \neq n\pi,\, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que

$$\int f'(x)\ \csc[f(x)]\ \cot[f(x)]\,dx = -\csc[f(x)] + C$$

Ejemplo 5.37

$\int x\ \csc\,(4x^2)\ \cot\,(4x^2)\ dx$

$$\begin{aligned}\int x\ \csc\,(4x^2)\ \cot\,(4x^2)\ dx &= \frac{1}{8}\int 8x\ \csc\,(4x^2)\ \cot\,(4x^2)\ dx \\ &= = \frac{1}{8}[-\csc(x^2)] + C \\ &= \frac{-\csc(4x^2)}{8} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.38

$$\int \frac{\csc(3x)}{\tan(3x)}\ dx = \frac{1}{3}\int 3\ \csc(3x)\ \cot(3x)\ dx = \frac{-1}{3}\ \csc(3x) + C$$

Ejemplo 5.39

$$\int \frac{e^x\ \cos(e^x)}{\operatorname{sen}^2(e^x)}\ dx = \int e^x \frac{\cos(e^x)\ dx}{\operatorname{sen}(e^x)\ \operatorname{sen}(e^x)} = \int e^x\ \cot(e^x)\ \csc(e^x)\ dx = -\csc(e^x) + C$$

EJERCICIOS

5.28 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ \operatorname{sen}^2\,(\ln\ x)\ \operatorname{sen}(\ln\ x)}$

5.29 $\displaystyle\int \csc\ x\ (\csc\ x\ +\ \cot\ x)\ dx$

9. Calculemos ahora $\int \sec u\ du$. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por la expresión $\sec u + \tan u$ en la forma siguiente:

$$\int \sec u\ du = \int \frac{\sec u\ (\sec u + \tan u)\ du}{\sec u + \tan u} + C$$

$$= \int \frac{\sec^2 u + \sec u \, \tan u \, du}{\sec u + \tan u} = \ln |\sec u \, + \tan u| + C$$

Esto es así ya que, según lo estudiado sobre la integral que da como resultado la función logaritmo natural, si $f(u) = \sec u + \tan u$ entonces $f'(u) = \sec u \, \tan u + sec^2 u$ y se tiene por tanto una integral de la forma

$$\int \frac{f'(u) \, du}{f(u)}$$

El resultado anterior es válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi, \, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) \, dx$, por lo que:

$$\int f'(x) \, \sec[f(x)] \, dx = \ln |\sec[f(x)] + \tan[f(x)]| + C$$

Ejemplo 5.40

$$\int \sec 6x \, dx = \frac{1}{6} \int 6 \, \sec 6x \, dx = \frac{1}{6} \ln |\sec 6x \, + \tan 6x| + C$$

Ejemplo 5.41

$$\int 3x \, \sec x^2 \, dx = \frac{3}{2} \int 2x \, \sec x^2 \, dx = \frac{3}{2} \ln |\sec x^2 \, + \tan x^2| + C$$

Ejemplo 5.42

$$\int \frac{\sec(\ln x)}{x} \, dx = \ln |\sec(\ln x) \, + \tan(\ln x)| + C$$

EJERCICIOS

5.30 $\displaystyle\int \frac{\sec(e^{2x})}{e^{-2x}} \, dx$

5.31 $\displaystyle\int \frac{\sec(\tan x) \, dx}{\cos^2 x}$

10. En forma similar al procedimiento seguido en el caso anterior calcularemos $\int \csc u\, du$.

$$\int \csc u\, du = \int \frac{\csc u\,(\csc u - \cot u)}{\csc u - \cot u}\, du$$

$$= \int \frac{\csc^2 u - \csc u \cot u}{\csc u - \cot u}\, dx = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

Este resultado es válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi,\, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x)\,dx$, por lo que:

$$\int f'(x)\, \csc[f(x)]\, dx = \ln|\csc[f(x)] - \cot[f(x)]| + C$$

Ejemplo 5.43

$$\int x \csc x^2\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \csc x^2\, dx = \frac{1}{2}\ln|\csc x^2 - \cot x^2| + C$$

Ejemplo 5.44

$$\int e^x \csc e^x\, dx = \ln|\csc e^x - \cot e^x| + C$$

Ejemplo 5.45

$$\int \frac{3}{x} \csc\left(\frac{1}{x}\right) dx = -3\int \frac{-1}{x^2} \csc\left(\frac{1}{x}\right) dx = -3 \ln\left|\csc\left(\frac{1}{x}\right) - \cot\left(\frac{1}{x}\right)\right| + C$$

EJERCICIOS

5.32 $\displaystyle\int \frac{\csc(\cot x)}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

5.33 $\displaystyle\int \csc\left(\frac{x}{2a}\right) dx$

5.2.6 Integrales que involucran potencias y productos de funciones trigonométricas

Antes de proceder a determinar este tipo de integrales es conveniente recordar las fórmulas siguientes:

a.) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$

b.) $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

c.) $\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

d.) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$

e.) $\operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2},\ \alpha \in \mathbb{R}$

f.) $\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Estudiaremos mediante ejemplos los casos generales que se enuncian a continuación:

1. **Integrales del tipo** $\int \operatorname{sen}^n x\, dx,\ \int \cos^n x\, dx$ con n un entero positivo par.

Ejemplo 5.46

$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

Se utiliza la fórmula dada en e.)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.47

$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx
\end{aligned}$$

En la última integral se utiliza nuevamente la fórmula dada en e.), solo que en este caso α es igual a $2x$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.34 $\int \cos^2 x \, dx$

En forma similar se procede con $\int \cos^4 x \, dx$ y en general con las integrales de las potencias pares de las funciones seno y coseno.

2. **Integrales del tipo** $\int \sec^n x \, dx$, $\int \csc^n x \, dx$ con n un entero positivo par.

Ejemplo 5.48

$\int \sec^4 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx, \quad \text{note que} \quad D_x \tan x = \sec^2 x \\ &= \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C \end{aligned}$$

Similarmente, utilizando la identidad c.) puede determinarse $\int \csc^4 x \, dx$

Ejemplo 5.49

$\int \sec^6 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \, dx &= \int (\tan^2 x + 1)^2 \sec^2 x \, dx \\ &= \int (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx + 2 \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} + 2 \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C \end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.35 $\int \csc^6 x \, dx$

Utilizando el procedimiento anterior pueden calcularse las integrales de las potencias pares de las funciones secante y cosecante. En el caso de potencias impares debe utilizarse el método de la integración por partes que se estudiará más adelante.

3. **Integrales del tipo** $\int \tan^n x \, dx$, $\int \cot^n x \, dx$ con n un entero positivo par.

Ejemplo 5.50

$\int \tan^2 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \sec^2 x \, dx - \int dx \\
&= \tan x - x + C
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula dada en c., calcule $\int \cot^2 x \, dx$

Ejemplo 5.51

$\int \tan^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \, dx && = \int \sec^4 x \, dx - 2\int \sec^2 x \, dx + \int dx \\
&= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx - 2 \tan x + x && = \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx - 2 \tan x + x \\
&= \tan x - x + C && = \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - 2 \tan x + x \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - 2 \tan x + x + C && = \frac{\tan^3 x}{3} + x - \tan x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.52

Determine $\int \cot^4 x \, dx$

4. **Integrales del tipo** $\int \operatorname{sen}^m x \, dx$, $\int \cos^m x \, dx$, $\int \tan^m x \, dx$, $\int \cot^m x \, dx$ con m un entero positivo impar.

Ejemplo 5.53

$\int \text{sen}^3 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^3 x \, dx &= \int \text{sen}^2 x \text{ sen } x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \text{ sen } x \, dx \\
&= \int \text{sen } x \, dx - \int \cos^2 x \text{ sen } x \, dx \\
&= \int \text{sen } x \, dx + \int (\cos x)^2 \, (-\text{sen } x) \, dx \\
&= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 \, x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.54

Determine $\int \cos^3 x \, dx$

Ejemplo 5.55

$\int \cos^5 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx \\
&= \int (1-\text{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1 - 2 \text{ sen}^2 x + \text{sen}^4 x) \cos x \, dx \\
&= \int \cos x \, dx - 2 \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx + \int \text{sen}^4 x \cos x \, dx \\
&= \text{sen } x - \frac{2}{3} \text{ sen}^3 x + \frac{1}{4} \text{ sen}^4 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.56

Calcule $\int \text{sen}^7 x \, dx$

Ejemplo 5.57

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\ dx &= \int \tan^2 x\ \tan x\ dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)\ \tan x\ dx\\ &= \int \sec^2 x\ \tan x\ dx - \int \tan x\ dx\\ &= \frac{1}{2}\ \tan^2 x\ dx + \ln\ |\cos x| + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.58

$\int \cot^5 x\ dx$

$$\begin{aligned}\int \cot^5 x\ dx &= \int \cot^4 x\ \cot\ x\ dx = \int (\cot^2 x)^2\ \cot\ x\ dx\\ &= \int \csc^4 x\ \cot\ x\ dx - 2\int \csc^2 x\ \cot\ x\ dx + \int \cot\ x\ dx\\ &= \int (\cot^2 x + 1)\ \csc^2 x\ \cot\ x\ dx - 2\int \cot\ x\ \csc^2 x\ dx + \int \cot\ x\ dx\\ &= -\frac{1}{4}\ \csc^4 x + \cot^2 x + \ln\ |\mathrm{sen}\ x| + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.59

Determine $\int \tan^5 x\ dx$

5. **Integrales del tipo** $\int \cos^n x\ \mathrm{sen}^r\ x\ dx$, $\int \tan^n x\ \sec^r\ x\ dx$, $\int \cot^n x\ \sec^r\ x\ dx$, con n y r ambos enteros positivos pares.

Ejemplo 5.60

$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$ (utilizando las fórmulas e. y f.)

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\, dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{8}\int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\, dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\, dx - \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\, dx \\
&= \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{8}\int (\cos 2x - \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.61

$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx \\
&= \int \tan^2 x\,(\tan^2 x + 1)\sec^2 x\, dx \\
&= \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx \\
&= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{5}\tan^3 x + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.36 Calcule $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

5.37 Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

5.38 Calcule $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$

6. **Integrales del tipo** $\int \operatorname{sen}^n x \cos^r x \, dx$, $\int \tan^n x \sec^r x \, dx$, $\int \cot^n x \csc^r x \, dx$, con n y r ambos enteros positivos, siendo por lo menos uno de los exponentes impar.

Ejemplo 5.62

$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx \\
&= \int (1-\cos^2 x) \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\int \cos^4 x \, (-\operatorname{sen} x) \, dx + \int \cos^6 x (-\operatorname{sen} x) \, dx \\
&= \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.63

$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$ Ejercicio para el estudiante

Ejemplo 5.64

$$\int \cos^5 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \cos^5 x \, (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \cos^5 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^7 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{1}{8} \cos^8 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.65

$$\int \tan^3 x \sec x \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec x \, dx &= \int \tan^2 x \tan x \sec x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x \; - 1) \tan x \sec x \, dx \\
&= \int \sec^2 x \, (\tan x \sec x) \, dx - \int \tan x \sec x \, dx \\
&= \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.66

$\int \cot^5 x \csc x \, dx$ Ejercicio para el estudiante

EJERCICIOS

5.39 $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$

5.40 $\int \sqrt{\cos x} \operatorname{sen}^3 x \, dx$

5.41 $\int \sec^6 x \; dx$

5.42 $\int \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t} \, dt$

5.43 $\int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y} \, dy$

5.44 $\int \frac{\sec^3 x}{\tan^4 x} \, dx$

5.45 $\int \frac{\csc^4 x}{\cot^2 x} \, dx$

5.2.7 Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas inversas

A partir de las fórmulas estudiadas en el capítulo de derivación sobre las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, pueden determinarse varias integrales indefinidas.

1. Como $D_x \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$

   Además

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \; a > 0 \qquad \text{(Compruébelo)}$$

   En general

$$\int \frac{f'(x)\; dx}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C, \; a > 0$$

Ejemplo 5.67

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Ejemplo 5.68

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{8})^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$$

Ejemplo 5.69

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\,\text{arcsen}(2x) + C \quad \text{(En este caso, } f(x) = 2x\text{)}$$

)

Ejemplo 5.70

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-7x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - \left(\sqrt{7}\,x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{\sqrt{7}\,dx}{\sqrt{3^2 - \left(\sqrt{7}\,x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{3}\right) + C$$

Ejemplo 5.71

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x+1)^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x+1}{4}\right) + C$$

Ejemplo 5.72

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-(3-x^2)^2}} = \frac{-1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{9-(3-x^2)^2}} = \frac{-1}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{3-x^2}{3}\right) + C$$

Note que $f(x) = 3 - x^2$ y $f'(x) = -2x\,dx$

Ejemplo 5.73

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$$

En este caso debe “completarse cuadrados” en la expresión que aparece en el subradical.

$4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2$

Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Ejemplo 5.74

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x}}$$

Volvemos a completar cuadrados en el subradical

$-4x^2+12x = 9-(2x-3)^2$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x-3)^2}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{9-(2x-3)^2}} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{3}\right)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.75

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3-2x^2}} &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x^2}}+\int \frac{3\,dx}{\sqrt{3-2x^2}} \\ &= \int x\left(3-2x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx+3\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\,x\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{4}\int -4x\left(3-2x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx+\frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\,x\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3-2x^2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.76

$$\int \frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2}\int \frac{-2x-2+2}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2}\int \frac{(-2x-2)}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2}\int \frac{(-2x-2)}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2}\int (-2x-2)\,(4-2x-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} \\
&= \frac{-1}{2}\,\frac{(4-2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= -\sqrt{4-2x-x^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.46 $\displaystyle\int \frac{(2x-3)}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

5.47 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

5.48 $\displaystyle\int \frac{(2x+3)}{\sqrt{5-x^2-4x}}\,dx$

2. Como D_x arctan $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan\, x + C$$

Además $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$, donde $a > 0$. (Compruébelo!)

En general:

$$\int \frac{f'(x)\, dx}{a^2 + [f(x)]^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C$$

Ejemplo 5.77

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

Ejemplo 5.78

$$\int \frac{dx}{2+4x^2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+4x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(2x)^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{2\, dx}{(\sqrt{2})^2+(2x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) + C &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\, x) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.79

$$\int \frac{x+2}{5+2x^2}\, dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{5+2x^2}\, dx &= \frac{x\, dx}{5+2x^2} + \int \frac{2\, dx}{5+2x^2} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{4x\, dx}{5+2x^2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\, dx}{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}x)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln|5+2x^2| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \arctan \frac{\sqrt{2}\, x}{\sqrt{5}} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.80

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+3}\,dx$$

Se "completa cuadrados" en la expresión que está en el denominador.

$$4x^2+4x+3 = 4x^2+4x+4-1+3 = (2x+1)^2+2$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(\sqrt{2})^2+(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Ejemplo 5.81

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Ejercicio para el estudiante

Ejemplo 5.82

$$\int \frac{3x\,dx}{x^2+6x+12}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x\,dx}{x^2+6x+12} &= \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+6x+12} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x+6-6}{x^2+6x+12}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+12} + \frac{3}{2}\int \frac{-6\,dx}{x^2+6x+12} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+12} - 9\int \frac{dx}{3+(x+3)^2} \\
&= \frac{3}{2}\ln|x^2+6x+12| - \frac{9}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.83

$$\int \frac{2x^3\,dx}{2x^2-4x+3}$$

En este caso se debe hacer primero la división, pues el exponente de la variable en el numerador es mayor que el exponente de la variable en el denominador.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3\,dx}{2x^2-4x+3} &= \int \frac{2x^3}{2x^2-4x+3}\,dx = \int (x+2) + \frac{5x-6}{2x^2-4x+4}\,dx \\
&= \int (x+2)\,dx + \int \frac{5x}{x^2-4x+3}\,dx - 6\int \frac{dx}{2x^2-4x+3} \\
&= \int (x+2)\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{4x\,dx}{2x^2-4x+3} - 6\int \frac{dx}{2x^2-4x+3} \\
&= \int (x+2)\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{(4x-4+4)\,dx}{2x^2-4x+3} - 6\int \frac{dx}{2x^2-4x+3} \\
&= \int (x+2)\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{(4x-4)\,dx}{2x^2-4x+3} + \frac{5}{4}\int \frac{4\,dx}{2x^2-4x+3} - 6\int \frac{dx}{2x^2-4x+3} \\
&= \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{5}{4}\ln|2x^2-4x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+1} \\
&= \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{5}{4}\ln|2x^2-4x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-\sqrt{2}) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.84

$$\int \frac{3x^3\,dx}{4x^2+12x+13}\,dx$$

Ejercicio para el estudiante

Vamos ahora a estudiar algunos tipos de integrales que no se determinan utilizando las fórmulas anteriores, sino mediante algunas técnicas especiales, llamadas técnicas de integración.

5.3 Técnicas de Integración: Método de sustitución:

Anteriormente hemos resuelto integrales como las siguiente:

$$\int x\,\sqrt[3]{4-x^2}\,dx$$

Como $d(4-x^2) = -2x\ dx$ entonces multiplicando y dividiendo por -2 se obtiene que:

$$\int x\sqrt[3]{4-x^2}\ dx = \frac{-1}{2}\int -2x(4-x^2)^{\frac{1}{3}}\ dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

Sin embargo, una integral como $\int x\sqrt{x+2}\ dx$ no puede calcularse por el procedimiento anterior ya que $d(x+2) = dx \neq x\ dx$. Se necesita por tanto un procedimiento que nos permita calcular este y similares tipos de integrales. Para ello veamos el teorema siguiente:

Teorema 5.2

Si $x = g(u)$ es una función derivable que posee una función inversa $u = g^{-1}(x)$ también derivable. Entonces, en cualquier intervalo donde $g'(x) \neq 0$ se tiene que:

$$\int f[g(u)]\ g'(u)du = H(u) + C \Longrightarrow \int f(x)\,dx = H[g^{-1}(x)] + C$$

Prueba:

Utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$D_xH(u) = D_xH[g^{-1}(x)] = D_uH(u)\cdot D_x[g^{-1}(x)]$$

$$= D_uH(u)\cdot\frac{1}{g'(u)}$$

(Recuerde que $D_yx = \frac{1}{D_xy}$, o sea, la derivada de la función inversa es igual a 1 sobre la derivada de la función original).

Como $D_uH(u) = f[g(u)]g'(u)$ entonces

$$D_xH(g^{-1}(x)) = f[g(u)]g'(u)\cdot\frac{1}{g'(u)} = f[g(u)] = f(x)$$

Con esto se ha demostrado que $H[g^{-1}(x)]$ es una derivada inversa de f, y que por tanto, bajo condiciones apropiadas es posible llevar a cabo el proceso de sustitución.

Ejemplo 5.85

$\int x\sqrt{x+2}\,dx$

Sea $u = x+2$, $du = dx$

luego $x = u-2$, sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+2}\,dx &= \int (u-2)\sqrt{u}\,du = \int (u^{\frac{3}{2}} - 2\,u^{\frac{1}{2}})\,du \\ &= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(u)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5}\,(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\,(x+2)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.86

$\int x^2\,\sqrt[3]{x+4}\,dx$

Sea $u^3 = x+4$, $3u^2du = dx$, $x = u^3 - 4$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int x^2\,\sqrt[3]{x+4}\,dx &= \int (u^3-4)^2\,\sqrt[3]{u^3}\,3u^2\,du \\ &= \int (u^6 - 8u^3 + 16)u\,3u^2\,du \\ &= 3\int (u^6 - 8u^3 + 16)\,u^3\,du \\ &= 3\int (u^9 - 8u^6 + 16u^3)du \\ &= 3\left[\frac{u^{10}}{10} - 8\,\frac{u^7}{7} + 16\,\frac{u^4}{4}\right] + C,\ \text{como}\ u = \sqrt[3]{x+4} \\ &= \frac{3}{10}\,(\sqrt[3]{x+4})^{10} - \frac{24}{7}\,(\sqrt[3]{x+4})^7 + 12(\sqrt[3]{x+4}) + C\end{aligned}$$

Note que se escogió la variable u con el exponente 3, (u^3), para que al sustituir se obtuviera una raíz cúbica exacta.

Ejemplo 5.87

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+4}}\,dx$$

Sea $u^2 = 3x+4$, luego $2u\,du = 3\,dx \implies \frac{2}{3}u\,du = dx$. Además $x = \frac{u^2-4}{3}$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+4}} &= \int \frac{\frac{u^2-4}{3}\cdot\frac{2}{3}u}{\sqrt{u^2}}\,du \\
&= \frac{2}{9}\int \frac{u(u^2-4)}{u}\,du \\
&= \frac{2}{9}\int (u^2-4)\,du \\
&= \frac{2}{9}\left[\frac{u^3}{3}-4u\right]+C \\
&= \frac{2}{27}\,u^3-\frac{8}{3}u+C, \text{ como } u=\sqrt{3x+4} \\
&= \frac{2}{27}\left[\sqrt{3x+4}\right]^3-\frac{8}{3}\sqrt{3x+4}+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.88

$$\int \frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt[3]{y}}\,dy$$

En este caso se debe sustituir "y" por una expresión que posea tanto raíz cuadrada como cúbica, así $y = u^6$ y entonces $dy = 6u^5du$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt[3]{y}}\,dy &= \int \frac{\sqrt{u^6}\,6u^5}{1+\sqrt[3]{u^6}}\,du \\
&= 6\int \frac{u^8}{u^2+1}\,du \\
&= 6\,\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}-u+\arctan u+C \\
&= \frac{6}{7}\,(\sqrt[6]{y})^7-\frac{6}{5}\,(\sqrt[6]{y})^5+2(\sqrt[6]{y})^3-6\sqrt[6]{y}+6\arctan\sqrt[6]{y}+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.89

$$\int \frac{x\ dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Sea $u^3 = x+1$. Entonces $3u^2du = dx$. Además $x = u^3 - 1$. Sustituyendo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\ dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{(u^3-1)3u^2du}{(u^3)^{\frac{2}{3}}} \\
&= 3\int \frac{u^2(u^3-1)\ du}{u^2} \\
&= 3\int (u^3-1)\ du \\
&= 3\left[\frac{u^4}{4} - u\right] + C \\
&= \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x+1})^4 - 3\sqrt[3]{x+1} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.90

$$\int (x^3+3)^{\frac{1}{4}}\ x^5\ dx$$

Sea $u^4 = x^3 + 3$. Entonces $4u^3du = 3x^2dx$ o también $\frac{4}{3}u^3du = x^2dx$

Además $x^3 = u^4 - 3$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int (x^3+3)^{\frac{1}{4}} x^3 \cdot x^2 dx &= \int (u^4)^{\frac{1}{4}}(u^4-3)\ \frac{4}{3}\ u^3\ du \\
&= \frac{4}{3}\ u(u^4-3)u^3\ du \\
&= \frac{4}{3}\int (u^8 - u^4)\ du \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{u^9}{9} - \frac{u^5}{5}\right] + C \\
&= \frac{4}{27}\left[\sqrt[4]{x^3+3}\right]^9 - \frac{4}{15}\ (\sqrt[4]{x^3+3})^5 + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.49 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$

5.50 $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

5.51 $\displaystyle\int x(2+x)^{\frac{2}{3}}$

5.52 $\displaystyle\int x^5(3x^2+4)\ dx$

5.53 $\displaystyle\int \sqrt{6+y}(y+2)^2\,dy$

5.4 Métodos de Integración: Integración por partes

Esta es otra técnica que se utiliza para expresar una integral en otra expresión que se puede determinar más fácilmente.

Consideremos dos funciones f y g derivables en S. Luego, por medio del diferencial de un producto se tiene que:

$$d[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\,g'(x)\ dx + g(x)\,f'(x)\ dx$$

$$f(x)\,g'(x)\ dx = d[f(x)\cdot g(x)] - g(x)\,f'(x)\ dx$$

integrando a ambos lados:

$$\int f(x)\,g'(x)\ dx = \int d\,[f(x)\cdot g(x)] - \int g(x)\,f'(x)\ dx$$

de donde

$$\int f(x)\,g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,f'(x)\ dx$$

Esta es la fórmula de integración por partes.

Utilizando los diferenciales de las funciones, si $u=f(x)$ entonces $du=f'(x)\,dx$, y si $v=g(x)$ entonces $dv=g'(x)\,dx$.

Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Haciendo una elección apropiada de u y dv, la fórmula anterior expresa la integral $\int u\,dv$ en términos de otra integral $\int v\,du$, que puede resultar más fácil de integrar.

Si $\int v\,du$ fuera más complicada que la integral dada, probablemente la selección hecha no ha sido la más adecuada.

Es corriente utilizar el método de integración por partes en integrales del tipo:

$$\int x^n \operatorname{sen}(a\,x)\,dx, \int x^n \cos(a\,x)\,dx, \int x^n e^{ax}\,dx, \int \ln x\,dx,$$

Así como en las que contienen en su integrando funciones trigonométricas inversas.

Con los ejemplos siguientes, el o la estudiante podrá darse una idea de la selección adecuada de las variables u y dv.

Ejemplo 5.91

$\int 3x \operatorname{sen} x\,dx$

Si $u = 3x$ entonces $du = 3\,dx$

Si $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ entonces $v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$

$$\begin{aligned} \int 3x \operatorname{sen} x\,dx &= 3x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 3\,dx \\ &= -3x\cos x + 3\operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Note que sin afectar el resultado final, la constante C de integración puede adjuntarse cuando se lleva a cabo la última integración, y no cuando se determina v a partir de dv.

En algunos casos es necesario aplicar varias veces la integración por partes como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.92

$\int x^2\, e^{3x}\ dx$

Si $u = x^2$ entonces $du = 2x\ dx$. Si $dv = e^{3x}\ dx$ entonces $v = \int e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\ dx = \frac{e^{3x}}{3}$

Luego:

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^{3x}\ dx &= x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot 2x\ dx \\ &= \frac{x^2\, e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x\, e^{3x}\ dx\end{aligned}$$

ahora $u = x, du = dx$ y $dv = e^{3x}\ dx$ y $v = \frac{1}{3}\, e^{3x}\ dx$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^{3x}\ dx &= \frac{x^2\, e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x\, e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\ dx\right] \\ &= \frac{x^2\, e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x\, e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\ dx\right] \\ &= \frac{x^2\, e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x\, e^{3x} + \frac{2}{27}\, x\, e^{3x} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.93

$\int \ln\, x\ dx$

Si $u = \ln x$ entonces $du = \frac{dx}{x}$

Si $dv = dx$ entonces $v = x$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \ln\, x\ dx &= x\ \ln\, x - \int x\, \frac{dx}{x} \\ &= x\ \ln\, x - \int dx \\ &= x\ \ln\, x - x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.94

$\int x^2 \ln x \, dx$

Si $u = \ln x$ entonces $du = \dfrac{dx}{x}$

Si $dv = x^2 \, dx$ entonces $v = \dfrac{x^3}{3}$

Luego:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.95

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

Si $u = \operatorname{sen} x$ entonces $du = \cos x \, dx$

Si $dv = e^x \, dx$ entonces $v = e^x \, dx$

Luego:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$$

Nuevamente: $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x \, dx$

$dv = e^x \, dx$, $v = e^x$

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x) \, dx \right]$

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$

$2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \dfrac{e^x}{2} \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$

Ejemplo 5.96

$\int \sec^3 x\ dx$

Podemos escribir: $\int \sec^3 x\ dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\ dx$

Si $u = \sec x$ entonces $du = \sec x \cdot \tan x\ dx$ y $dv = \sec^2 x\ dx$ entonces $v = \int \sec^2 x\ dx = \tan x$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\ dx &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x\ dx \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x\ dx \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x\ (\sec^2 x - 1)\ dx \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x\ dx + \int \sec x\ dx \\
&= \int \sec^3 x\ dx + \int \sec^3 x\ dx \\
&= \sec x\ \tan x + \int \sec x\ dx \\
&= \int \sec^3 x\ dx \\
&= \frac{1}{2}(\sec x\ \tan x + \ln\ |\sec x + \tan x|) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.97

$\int \arctan\ x\ dx$

Si $u = \arctan x$ entonces $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

Si $dv = dx$ entonces $v = x$

Luego:

$$\int \arctan\ x\ dx = x\ \arctan\ x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\ \arctan\ x - \frac{1}{2}\ \ln\ |1+x^2| + C$$

Ejemplo 5.98

$$\int (x+1)^2\, e^x\ dx$$

Si $u = (x+1)^2$ entonces

$du = 2(x+1)$ dx

Si $dv = e^x\ dx$ entonces $v = e^x$

Luego:

$$\int (x+1)^2\, e^x\ dx = e^x\ (x+1)^2 - \int 2(x+1)\, e^x\ dx$$

nuevamente: si $u = x+1$ entonces $du = dx$ y si $dv = e^x\ dx$ entonces $v = e^x$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2\, e^x\ dx &= e^x(x+1)^2 - \left[e^x(x+1) - \int e^x\ dx\right] \\ &= e^x(x+1)^2 - (x+1)\, e^x + e^x + C \end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.54 $\int \ln^2 x\ dx$

5.55 $\int \csc^3 5x\ dx$

5.56 $\int x \ln \sqrt{x+2}\ dx$

5.57 $\int x \operatorname{arcsen} x\ dx$

5.58 $\int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx$

5.59 $\int x \sec^2 x\ dx$

5.60 $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$

5.5 Integración por sustitución trigonométrica

Las sustituciones que involucran funciones trigonométricas se pueden llevar a cabo en aquellas integrales cuyo integrando contiene una expresión de la forma:

$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ con $a > 0$ y $b > 0$

La sustitución trigonométrica permite transformar una integral en otra que contiene funciones trogonométricas cuyo proceso de integración es más sencillo.

Estudiaremos cada uno de los casos como sigue:

El integrando contiene una función de la forma $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ con $a > 0$, $b > 0$

Se hace el cambio de variable escribiendo:

$x = \frac{a}{b}\,\text{sen}\,\theta$, donde $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y $x \in \left]-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right[$

Si $x = \frac{a}{b}\,\text{sen}\,\theta$ entonces $dx = \frac{a}{b}\cos\theta\, d\theta$

Además:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - b^2x^2} &= \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2}\,\text{sen}^2\,\theta} \\
&= \sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\theta} \\
&= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\,\theta)} \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta} \\
&= |a\cos\theta| \\
&= a\cos\theta
\end{aligned}$$

pues $a > 0$ y como $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ entonces $\cos\theta > 0$

Luego: $\sqrt{a^2 - b^2x^2} = a\cos\theta$

Como $x = \frac{a}{b}\,\text{sen}\,\theta$ entonces $\text{sen}\,\theta = \frac{bx}{a}$ y $\theta = \text{arcsen}\left(\frac{bx}{a}\right)$

Para este caso, las otras funciones trigonométricas pueden obtenerse a partir de la figura siguiente:

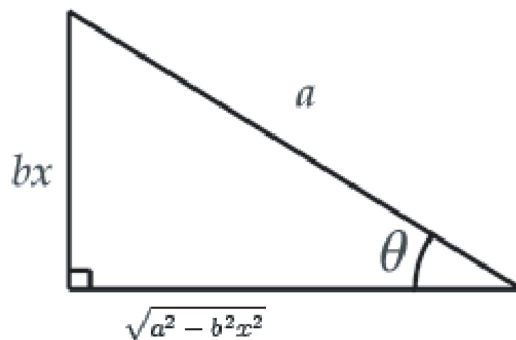


Figura 5.1

Ejemplo 5.99

$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx, \quad x \in]-4, 4[$

Sea $x = 4 \operatorname{sen}\theta$ con $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\implies dx = 4\cos\theta\, d\theta$

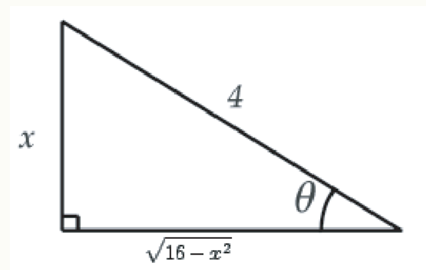
Luego: $16 - x^2 = 16 - 16\operatorname{sen}^2\theta = 16\,(1 - \operatorname{sen}^2\theta) = 16\cos^2\theta \implies \sqrt{16 - x^2} = 4\cos\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{16 - x^2}\, dx &= \int 4\cos\theta \cdot 4\cos\theta\, d\theta \\
&= 16\int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 16\int \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 8\int (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\
&= 8\,(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta) + C \\
&= 8\theta + 4 \cdot 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C \\
&= 8\theta + 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C
\end{aligned}$$

Como $x = 4\operatorname{sen}\theta$ entonces $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{4}$ y $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right)$

Además $\sqrt{16 - x^2} = 4\cos\theta$ por lo que $\cos\theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$
Estos resultados también pueden obtenerse a partir de la figura siguiente:



Por último:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{16 - x^2}\, dx &= 8\,\theta + 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C \\
&= 8\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right) + 8 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.100

$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}}, \quad x \in \left]\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\right[$

Sea $x = \dfrac{5}{2}\,\text{sen}\,\theta,\ \theta \ \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$dx = \dfrac{5}{2}\cos\theta\, d\theta$

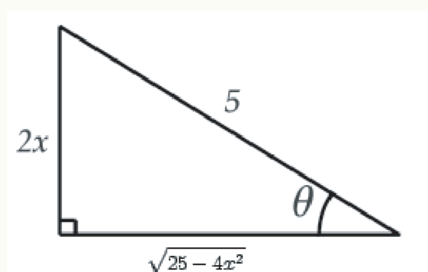
Luego $25 - 4x^2 = 25 - 4\cdot\dfrac{25}{4}\,\text{sen}^2\,\theta = 25 - 25\,\text{sen}^2\,\theta = 25\cos^2\theta$

Así $\sqrt{25-4x^2} = 5\cos\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} &= \int \frac{\frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta}{\frac{5}{2}\,\text{sen}\,\theta\cdot 5\cos\theta} \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\text{sen}\,\theta} \\
&= \frac{1}{5}\int \csc\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{5}\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C
\end{aligned}$$

Como $x = \dfrac{5}{2}\,\text{sen}\,\theta$ entonces $\text{sen}\,\theta = \dfrac{2x}{5}$ por lo que puede utilizarse la siguiente figura para dar el resultado final:



$\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{1}{\frac{2x}{5}} = \dfrac{5}{2x}$

$\cot\theta = \dfrac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5}{2x} - \frac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}\right| + C$$

Ejemplo 5.101

$\displaystyle\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

Sea $x = \sqrt{5}\ \text{sen}\,\theta,\ \ \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\implies dx = \sqrt{5}\cos\theta\, d\theta$

Luego $5 - x^2 = 5 - 5\ \text{sen}^2\theta = 5\cos^2\theta$

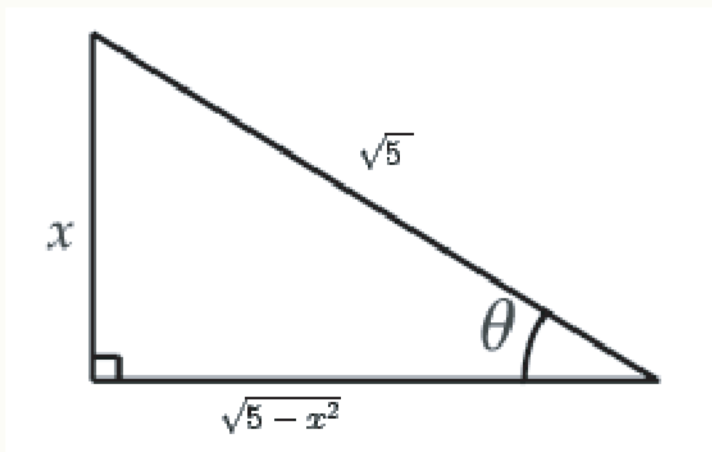
Así $(5-x^2)^{\frac{3}{2}} = (5\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(5\cos^2\theta)^3} = (\sqrt{5}\cos\theta)^3 = 5\sqrt{5}\cos^3\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\, d\theta}{5\sqrt{5}\cos^3\theta} \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{5}\int \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{5}\tan\theta + C \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C
\end{aligned}$$

pues $\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$ y $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}$

También puede utilizarse:



Ejemplo 5.102

$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in]-2,2[$

Sea $x = 2 \text{ sen}\,\theta,\ \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\implies dx = 2 \cos\theta\, d\theta$

Además: $4 - x^2 = 4 - 4 \text{ sen}^2\theta = 4\cos^2\theta \implies \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{(2 \text{ sen}\,\theta)^2\, 2\cos\theta\, d\theta}{2\cos\theta} \\
&= 4 \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 4 \int \text{sen}^2\theta\, d\theta \\
&= 2 \int (1-\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= 2\left(\theta - \frac{1}{2} \text{ sen}\, 2\theta\right) + C \\
&= 2\theta - 2 \text{ sen}\,\theta \cos\theta + C \\
&= 2 \text{ arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C \\
&= 2 \text{ arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\,(4-x^2)}{2} + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.61 $\int x^2 \sqrt{25-x^2}\, dx$

5.62 $\int \frac{x^2}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

5.63 $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{16-x^2}}$

5.5.1 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ con $a>0\,,\,b>0$

Hacemos un cambio de variable escribiendo $x=\dfrac{a}{b}\tan\theta$, donde $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ y $x\in\mathbb{R}$

Si $x=\dfrac{a}{b}\tan\theta$ entonces $dx=\dfrac{a}{b}\sec^2\theta\,d\theta$. Además:

$$\sqrt{a^2+b^2x^2}=\sqrt{a^2+b^2\cdot\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=|a\sec\theta|$$

Como $a>0$ y $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ entonces $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ es positiva y por tanto $\sqrt{a^2+b^2x^2}=a\sec\theta$

Las otras funciones trigonométricas pueden obtenerse a partir de la siguiente figura:

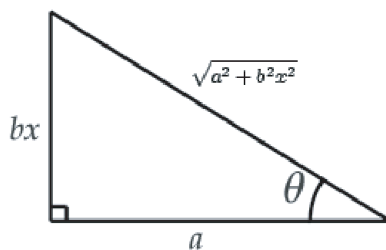


Figura 5.2

Ejemplo 5.103

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

Sea $x=2\tan\theta,\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\implies dx=2\sec^2\theta\,d\theta$

Luego: $4+x^2=4+4\tan^2\theta=4(1+\tan^2\theta)\implies 4+x^2=4\sec^2\theta$

Entonces $\sqrt{4+x^2}=\sqrt{4\sec^2\theta}=|2\sec\theta|=2\sec\Theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}&=\int\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta}\\&=\int\sec\theta\,d\theta\\&=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C\\&=\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.104

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+6}}$$

Sea $x = \sqrt{6}\tan\theta,\ \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$dx = \sqrt{6}\sec^2\theta\, d\theta$

Luego: $x^2+6 = 6\tan^2\theta + 6 = 6(\tan^2\theta+1) = 6\sec^2\theta$

$\sqrt{x^2+6} = \sqrt{6\sec^2\theta} = \sqrt{6}\sec\theta \quad \left(\cos\theta > 0 \text{ si } \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{^2+6}}\,dx &= \int \frac{6\tan^2\theta\,\sqrt{6}\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{6}\sec\theta} \\
&= 6\int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta \\
&= 6\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\,d\theta \\
&= 6\int (\sec^3 - \sec\theta)\,d\theta \\
&= 6\left[\frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta) + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right] - 6\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= 3\sec\theta\tan\theta - 3\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= 3\cdot\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{x}{\sqrt{6}} - 3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}}\right| + C \\
&= \frac{x\sqrt{x^2+6}}{2} - 3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}+x}{\sqrt{6}}\right| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.105

$$\int \frac{x\,dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sea $x = \frac{3}{2}\tan\theta,\ \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

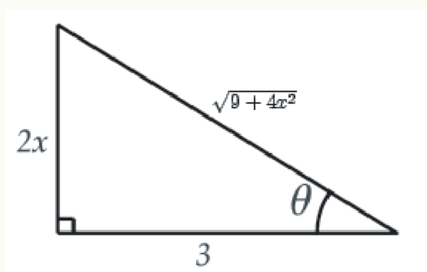
Luego $9+4x^2 = 9+4\cdot\frac{9}{4}\tan^2\theta = 9+9\tan^2\theta = 9(1+\tan^2\theta) = 9\sec^2\theta$

$(9+4x^2)^{\frac{3}{2}} = (9\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (9\sec^2\theta)^3 = (3\sec\theta)^3 = 27\sec^3\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\frac{3}{2}\tan\theta\cdot\frac{3}{2}\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int\frac{\tan\theta\,d\theta}{\sec\theta} \\ &= \frac{1}{12}\int\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}\,d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{1}{12}(-\cos\theta)+C\end{aligned}$$

Como



De la sustitución inicial $\tan\theta = \frac{2x}{3}$

Por tanto:

$$\int \frac{x\,dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{12}\cdot\frac{3}{\sqrt{9+4x^2}}+C$$

Ejemplo 5.106

$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

Sea $x = \sqrt{3}\tan\theta,\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$dx = \sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta$

Luego $x^2+3 = 3\tan^2\theta + 3 = 3(\tan^2\theta+1) = 3\sec^2\theta$

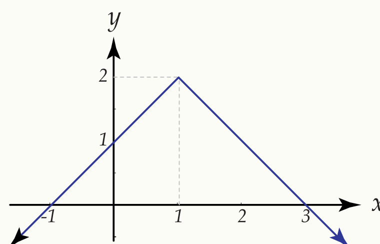
$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3\sec^2\theta} = \sqrt{3}\sec\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}} &= \int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta}{(\sqrt{3}\tan\theta)\sqrt[4]{3}\sec\theta} \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan^4\theta} \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\cos^4\theta}{\cos\theta\cdot \operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{9}\int \left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^4\theta} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{9}\int \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{-4}\, d\theta - \frac{1}{9}\int \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{-2}\, d\theta \\
&= \frac{-1}{27\operatorname{sen}^3\theta} + \frac{\csc\theta}{9} + C
\end{aligned}$$

Como $x = \sqrt{3}\tan\theta$ entonces $\tan\theta = \frac{x}{3}$

Por lo que se obtiene: $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}, \csc\theta = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$



Por último:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}} = \frac{-(\sqrt{x^2+3})^3}{27\,x^3} + \frac{\sqrt{x^2+3}}{9x} + C$$

EJERCICIOS

5.64 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}\,dx$

5.65 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+3x^2}}\,dx$

5.5.2 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ con $a>0$ y $b>0$

En este caso la sustitución adecuada es:

$x=\dfrac{a}{b}\sec\theta$, donde $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\bigcup\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$ y $x\in\left]-\infty,\dfrac{-a}{b}\right[\bigcup\left]\dfrac{a}{b},+\infty,\right[$, o sea $|x|>\dfrac{a}{b}$

Si $x=\dfrac{a}{b}\sec\theta$ entonces $dx=\dfrac{a}{b}\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$

Además $\sqrt{b^2x^2-a^2}=\sqrt{b^2\cdot\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\sec^2\theta-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}$

de donde $\sqrt{b^2x^2-a^2}=\sqrt{a^2\,\tan^2\theta}=|a\,\tan\theta|=a\,\tan\theta$, pues $a>0$ y $\tan\theta>0$ para $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\bigcup\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$

Como $x=\dfrac{a}{b}\sec\theta$ entonces ;$\sec\theta=\dfrac{bx}{a}$ por lo que $\theta=\text{arcsen}\left(\dfrac{bx}{a}\right)$

Utilizando el siguiente triángulo puede obtenerse las otras funciones trigonométricas:

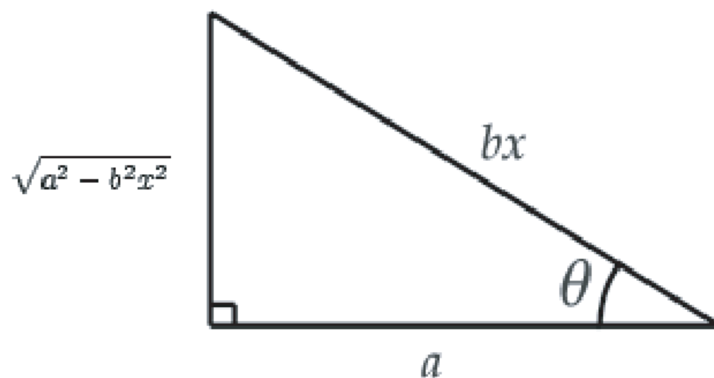


Figura 5.3

Ejemplo 5.107

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}, \quad |x|>3$$

Sea $x = 3\sec\theta \implies dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta,\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Luego $x^2-9 = 9\sec^2\theta - 9 = 9(\sec^2\theta - 1) = 9\tan^2\theta$ y $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\tan^2\theta} = 3\tan\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec\theta\cdot 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{3\tan\theta}\\
&= 3\int \sec^2\theta\,d\theta\\
&= 3\tan\theta + C = \sqrt{x^2-9}+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.108

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\,dx, |x| > \frac{1}{4}$$

Sea $x = \frac{1}{2}\sec\theta \implies dx = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

Luego $4x^2-1 = 4\cdot\frac{1}{4}\sec^2\theta - 1 = \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ y $\sqrt{4x^2-1} = \sqrt{\tan^2\theta} = \tan\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\,dx &= \int \frac{\tan\theta\cdot\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\frac{1}{2}\sec\theta}\\
&= \int \tan^2\theta\,d\theta\\
&= \int \tan\theta - \theta + C\\
&= \sqrt{4x^2-1} - \text{arcsec}\,(2x) + C\\
&= \int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.109

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-8}}, \quad |u| > 2\sqrt{2}$$

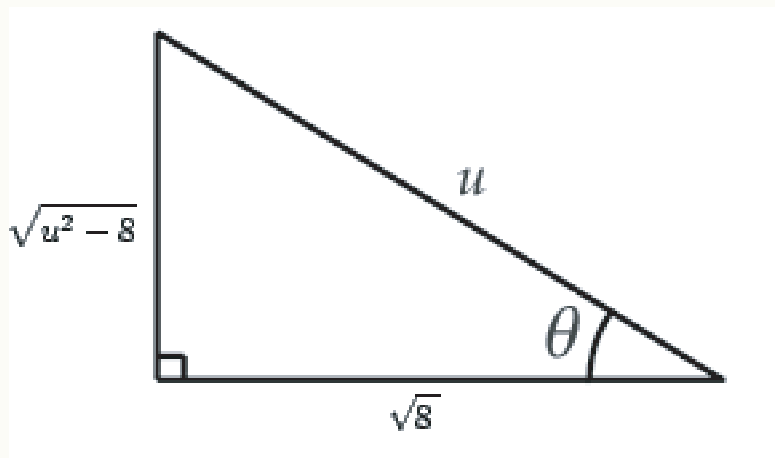
Sea $u = \sqrt{8}\,\sec\theta \implies du = \sqrt{8}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$

Luego $u^2 - 8 = 8\,\sec^2\theta - 8 = 8(\sec^2\theta - 1) = 8\,\tan^2\theta$ y $\sqrt{u^2-8} = \sqrt{8\,\tan^2\theta} = \sqrt{8}\,\tan\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-8}} &= \int \frac{\sqrt{8}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{8\,\sec^2\theta\,\sqrt{8}\,\tan\theta} \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} \\
&= \frac{1}{8}\int \cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\,\text{sen}\,\theta + C
\end{aligned}$$

Como $\sec\theta = \dfrac{u}{\sqrt{8}}$ puede utilizarse la siguiente figura para determinar $\text{sen}\,\theta$



Por último:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-8}} = \frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{u^2-8}}{u} + C$$

EJERCICIOS

5.66 $\int x^3\sqrt{4x^2-9}\,dx$

5.67 $\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^4}\,dy$

5.5.3 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$

Ejemplo 5.110

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$

Podemos escribir $x^2-6x+13 = x^2-6x+9+4 = (x-3)^2+4$

Luego $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$ es la integral que debemos calcular

Sea $x-3 = 2\tan\theta,\ \theta \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

Luego $(x-3)^2+4 = 4\tan^2\theta+4 = 4\sec^2\theta$ y $\sqrt{(x-3)^2+4} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2\sec\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta} \\
&= \int \sec\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{(x-3)^2+4}}{2}+\frac{x-3}{2}\right|+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.111

$$\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{21+4x-x^2}}$$

Se tiene que: $21+4x-x^2 = 21-(x^2-4x) = 25-(x-2)^2$. Luego la integral se convierte en: $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{25-(x-2)^2}}$ y se utiliza la sustitución $(x-2) = 5\ \text{sen}\,\theta$, de donde $x = 2+5\ \text{sen}\,\theta \implies dx = 5\cos\theta\ d\theta$

Luego: $25-(x-2)^2 = 25-25\ \text{sen}^2\theta = 25\cos^2\theta$ y $\sqrt{25-(x-2)^2} = 5\cos\theta$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{25-(x-2)^2}} &= \int \frac{(2+5\ \text{sen}\,\theta)^2\,5\cos\theta\ d\theta}{5\cos\theta}\\
&= \int (4+20\ \text{sen}\,\theta+25\ \text{sen}^2\theta)\ d\theta\\
&= \int 4\ d\theta + 20\int \text{sen}\,\theta\ d\theta + 25\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ d\theta\\
&= \int 4\ d\theta + 20\int \text{sen}\,\theta\ d\theta + \frac{25}{2}\int d\theta - \frac{25}{2}\int \cos 2\theta\ d\theta\\
&= 4\,\theta - 20\cos\theta + \frac{25}{2}\,\theta - \frac{25}{4}\ \text{sen}\,2\theta + C\\
&= \frac{33}{2}\,\theta - 20\cos\theta + \frac{25}{2}\ \text{sen}\,\theta\cos\theta + C\\
&= \frac{33}{2}\ \text{arcsen}\left(\frac{x-2}{5}\right) - 20\,\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{5} + \frac{25}{2}\cdot\frac{x-2}{5}\cdot\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{5} + C\\
&= \frac{33}{2}\ \text{arcsen}\left(\frac{x-2}{5}\right) - 4\sqrt{21+4x-x^2} + \frac{(x-2)\sqrt{21+4x-x^2}}{2} + C
\end{aligned}$$

con $|x-2| < 5$, o sea $x \in\,]-3, 7[$

Ejemplo 5.112

$I = \int \frac{(x+2)\ dx}{(3+2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Se tiene que $3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$ (completando cuadrados)

Luego la integral que se debe determinar es:

$\int \frac{(x+2)\ dx}{[4-(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}}$

Sea $(x-1) = 2\ \text{sen}\ \theta$, o sea $x = 1+2\ \text{sen}\ \theta \Longrightarrow dx = 2\cos\theta\ d\theta$

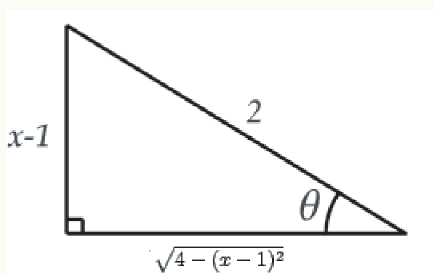
Luego $4-(x-1)^2 = 4-4\ \text{sen}^2\theta = 4(1-\text{sen}^2\theta) = 4\cos^2\theta$

$\left(\sqrt{4-(x-1)^2}\right)^3 = \left(\sqrt{4\cos^2\theta}\right)^3 = (2\cos\theta)^3 = 8\cos^3\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+2)\ dx}{[4-(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{(1+2\ \text{sen}\ \theta+2)\ 2\cos\theta\ d\theta}{8\cos^3\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(3+2\text{sen}\ \theta)\ d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{\cos^2\theta} + \frac{2\ \text{sen}\ \theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{3}{4}\int \sec^2\theta\ d\theta + \frac{1}{2}\cdot \text{sen}\ \theta\ (\cos\theta)^{-2}\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}\tan\theta - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\cos\theta)^{-1}}{-1} + C \\
&= \frac{3}{4}\tan\theta + \frac{1}{2\cos\theta} + C
\end{aligned}$$

Como $x-1 = 2\ \text{sen}\ \theta$ entonces $\text{sen}\ \theta = \frac{x-1}{2}$ y utilizando



se obtiene finalmente que

$$= \int \frac{(x+2)\ dx}{(3+2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} I = \frac{3}{4}\cdot\frac{(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + C,\ \text{con}\ x \in\,]-1,3[$$

Ejemplo 5.113

$$\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$$

Se tiene que $x^2+4x+3 = x^2+4x+4-1 = (x+2)^2-1$

por lo que $\displaystyle\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \frac{2x\ dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$, con $|x+2|>1$

Sea $x+2=\sec\theta$ de donde $x=\sec\theta-2 \implies dx=\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$

Luego $(x+2)^2-1=\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$ y $\sqrt{(x+2)^2-1}=\tan\theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} &= \int \frac{2\,(\sec\theta-2)\ \sec\theta\ \tan\theta\ d\theta}{\tan\theta} \\
&= 2\int (\sec^2\theta - 2\ \sec\theta)\ d\theta \\
&= 2\ \tan\theta - 4\ \ln\,|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= 2\sqrt{(x+2)^2-1} - 4\ \ln\,|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}| + C
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.68 $\displaystyle\int \frac{(2x-3)\ dx}{(x^2+2x-3)^{\frac{3}{2}}}$

5.69 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}\ dx$

5.70 $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\ dx}{(4-\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

5.71 $\displaystyle\int \frac{e^{-x}\ dx}{(9\,e^{-2x}+1)^{\frac{3}{2}}}$

5.6 Integración de fracciones racionales

Recibe el nombre de fracción racional una expresión de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Ejemplos de fracciones racionales son $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+4}$, $\dfrac{3x+5}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{6x^2+7x-5}{2x-3}$

Una fracción es propia, si el grado del polinomio en el numerador es menor que el del polinomio en el denominador. Por ejemplo $\dfrac{3x+1}{x^2-5x+5}$, $\dfrac{2x}{x^2+3}$, $\dfrac{3x^2+1}{x^3-1}$

Hasta el momento hemos determinado integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$ que da como resultado $A\,\dfrac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$ cuando $n \neq 1$ y $A\,\ln|x-a|+C$ si $n=1$

Además también se puede determinar integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{mx+b}{x^2+bx+c}\,dx$ donde $b^2-4ac<0$, es decir x^2+bx+c no es factorizable en $\mathbb{R}$ (Para este tipo de integral ver "Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas inversas").

Debemos ahora encontrar un método que permita obtener la derivada inversa de expresiones del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. La idea básica del método consiste descomponer una fracción racional en una suma de fracciones racionales más simples, llamadas usualmente fracciones parciales.

Daremos sin demostración los siguientes teoremas:

Teorema 5.3

Si $M(x)$ y $N(x)$ son polinomios, entonces:

$\displaystyle\int \frac{M(x)}{N(x)} = L(x)+\frac{R(x)}{N(x)}$, en donde $L(x)$ y $R(x)$ son polinomios tales que el grado de $R(x)$ es menor que el de $N(x)$

Ejemplo 5.114

$$\frac{5x^3+7x^2+x-1}{x^2+1} = 5x+7-\frac{4x+6}{x^2+1}$$

Teorema 5.4

Si $M(x)$ y $N(x)$ son polinomios tales que el grado de $M(x)$ es menor que el de $N(x)$, entonces $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ se puede representar como una suma $S(x)$ de expresiones de la forma:

$$\frac{A}{ax+b},\ \frac{B}{(ax+b)^n},\ \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c},\ \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Como resultado del teorema 5.4 se tienen los cuatro siguientes casos:

1) Cada factor lineal $ax+b$ que aparece sólo una vez en $N(x)$ posee un término de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$ en la suma $S(x)$.

2) Para cada factor lineal $ax+b$ que aparece k veces en $N(x)$ habrá una suma de k términos como sigue:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

en la suma $S(x)$

3) Para cada factor cuadrático ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$, que aparezca sólo una vez en $N(x)$ existe un término de la forma $\dfrac{Cx+D}{ax^2+bx+C}$ en la suma $S(x)$.

4) Para cada factor cuadrático ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$, que aparezca k veces en $N(x)$ habrá una suma de k términos como sigue:

$$\frac{C_1x+D_1}{ax^2+bx+c}+\frac{C_2x+D_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{C_kx+D_kx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

en la suma $S(x)$

Teorema 5.5

Si el valor de un polinomio $P(x)$ de grado n es igual al valor de su polinomio $Q(x)$ de grado m, donde $m\leq n$;, para al menos $n+1$ valores de x, entonces los polinomios son idénticos y tienen valores iguales para todos los valores de x.

El teorema 5.5 será utilizado para obtener los valores de las constantes en cada uno de los casos anteriores. Daremos ahora ejemplos de cada caso.

Caso 1: Calcular cada una de las siguientes integrales:

Ejemplo 5.115

$$\int \frac{4x-2}{x(x+1)\,(x-2)}\,dx$$

Observe que el denominador del integrando ya está factorizado, y cada factor lineal aparece solo una vez. Luego se puede escribir la siguiente igualdad (aplicando el teorema 5.4)

$$\frac{4x-2}{x(x+1)\,(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

de donde:

$$\frac{4x-2}{x(x+1)\,(x-2)} = \frac{A(x+1)\,(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)\,(x-2)}$$

igualando los numeradores se tiene:

$$4x-2 = A(x+1)\,(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

Para determinar los valores de A, B y C se pueden utilizar dos procedimientos.

i. Si dos polinomios $T(x)$ y $Z(x)$ son tales que $T(x) = Z(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces los coeficientes de potencias iguales de x en los dos polinomios deben ser iguales.

   Como:

   $4x-2 = A(x^2-x-2) + B(x^2-2x) + C(x^2+x)$

   entonces

   $4x-2 = (A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A$ y por tanto:

   $A+B+C=0$

   $-A-2B+C=4$

   $-2A=-2$

   Resolviendo el sistema anterior se obtiene que $A=1, B=-2$ y $C=1$

   Luego:

$$\frac{4x-2}{x(x+1)\,(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

Ejemplo 5.115 (continuación).

ii. Como los miembros de la ecuación $4x-2 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$ son polinomios de grado dos o menos y deben ser iguales para más de dos valores de x, del teorema 5.5 concluimos que son iguales para todos los valores de x. Luego es posible escoger tres valores arbitrarios de x para sustituirlos en la ecuación anterior y así obtener tres ecuaciones en las incógnitas A, B, C. Generalmente se utilizan valores de x que conduzcan a las ecuaciones más simples.

Así, si $x = 0$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 4(0)-2 &= A(0+1)(0-2) + B\cdot 0(0-2) + C\cdot 0(0+1) \\ &= A(1)(-2) \quad \text{de donde} \quad A = 1 \end{aligned}$$

Si $x = -1$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 4(-1)-2 &= A(-1+1)(-1-2) + B(-1)(-1-2) + C(-1)(-1+1) \\ &= B(3) \quad \text{de donde} \quad B = -2 \end{aligned}$$

Por último, si $x = 2$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 4(2)-2 &= A(2+1)(2-2) + B\cdot 2(2-2) + C\cdot 2(2+1) \\ &= C(6) \ \text{ de donde } \ C = 1 \end{aligned}$$

Como vemos, el resultado es el mismo que el obtenido en el procedimiento señalado en i.

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-2}{x(x+1)(x-2)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|x-2| + C \\ &= \ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+2)^2}\right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.116

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$$

En este caso se debe factorizar primero el denominador del integrando. Así $4x^3-x=x(2x+1)(2x-1)$

Luego:

$$\frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}=\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1}$$

Se deben calcular nuevamente los valores de A,B y C, utilizando para ello cualquiera de los dos procedimientos ya señalados.

Como:

$$\frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)\,(2x+1)}=\frac{A(2x-1)\,(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1)}{x(2x-1)\,(2x+1)}$$

entonces:

$$6x^2-2x-1=A(2x-1)\,(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1)$$

Utilizando el segundo procedimiento daremos a x los valores de $0,\ \frac{1}{2}$ y $\frac{-1}{2}$ como sigue:

Si $x=0$ entonces: $1=A(-1)(1)$ de donde $A=-1$

Si $x=\frac{1}{2}$ entonces: $-\frac{1}{2}=B(\frac{1}{2})(2)$ de donde $B=\frac{-1}{2}$

Si $x=\frac{-1}{2}$ entonces: $\frac{3}{2}=C(\frac{-1}{2})(-2)$ de donde $C=\frac{3}{2}$

Luego

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx=\int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}\,dx=\int \frac{-1}{x}\,dx+\int \frac{\frac{-1}{2}}{2x-1}\,dx+\int \frac{\frac{3}{2}}{2x+1}\,dx$$

$$=-\int \frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x-1}+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{2x+1}$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|2x-1|+\frac{3}{4}\ln|2x+1|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}{x\sqrt[4]{2x-1}}\right|+C$$

Ejemplo 5.117

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Luego, según el teorema 5.4

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

de donde:

$$2x+1 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

Utilizando el segundo procedimiento para determinar A, B y C, se obtiene que:

Si $x = 2$ entonces $5 = B(1)(5)$ de donde B=1

Si $x = 3$ entonces $-5 = C(-4)(-5)$ de donde C=$-\frac{1}{4}$

Si $x = 1$ entonces $3 = A(-1)(4)$ de donde A=$-\frac{3}{4}$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx &= \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{-3}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{\frac{-1}{4}}{x+3}\,dx \\
&= \frac{-3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3} \\
&= -\frac{3}{4}\ln|x-1| + \ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C
\end{aligned}$$

Caso 2:

Ejemplo 5.118

$\displaystyle\int \frac{2y^2+11y+8}{y^3+4y^2+4y}\,dy$

Factorizando el denominador del integrando se obtiene que

$y^3+4y^2+4y = y(y^2+4y+4) = y(y+2)^2.$

Se observa que el factor $(y+2)$ aparece dos veces, por lo que según el teorema 5.4 existirá una suma de dos términos para el término $(y+2)^2$

Luego:

$$\frac{2y^2+11y+8}{y^3+4y^2+4y} = \frac{2y^2+11y+8}{y(y+2)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} + \frac{C}{(y+2)^2}$$
$$\frac{2y^2+11y+8}{y(y+2)^2} = \frac{A(y+2)^2+By(y+2)+C(y)}{y(y+2)^2}$$

de donde:

$2y^2+11y+8 = A(y+2)^2+By(y+2)+C(y)$

Aplicando el teorema 5.5:

Si $y=0$ entonces $8=A(2)^2$ de donde $A=2$

Si $y=-2$ entonces $-6=C(-2)$ de donde $C=3$

Pueden ahora utilizarse los valores de A y C e igualar coeficientes para determinar el valor de B, o darle a"y" otro valor (según teorema 5.5) como se hace a continuación:

Si $y=1$ entonces $21=2(3)^2+B\cdot 1(3)+3(1)$ de donde $21=18+3B+3$ y por último $B=0$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \frac{2y+11y+8}{y^3+4y^2+4y}\,dy &= \int \frac{2}{y}\,dy + \int \frac{3}{(y+2)^2}\,dy \\ &= 2\int \frac{dy}{y} + 3\int (y+2)^{-2}\,dy \\ &= 2\ \ln|y| - \frac{3}{y+2} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.119

$$\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}\,dx$$

En este caso el factor x se repite 2 veces y el factor $(x-2)$ lo hace 3 veces.

Luego

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}$$

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{Ax(x-2)^3 + B(x-2)^3 + Cx^2(x-2)^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2}{x^2(x-2)^3}$$

de donde:

$$x^3 - 1 = Ax(x-2)^3 + B(x-2)^3 + Cx^2(x-2)^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2$$

Por el teorema 5.5:

Si $x=0$ entonces $-1 = B(-2)^3$ de donde $B = \frac{1}{8}$

Si $x=2$ entonces $7 = E(2)$ de donde $E = \frac{7}{4}$

Daremos ahora otros valores a x para obtener ecuaciones que permitan calcular los valores de A, C y D.

Si $x=1$ entonces $0 = -A + \frac{1}{8}\cdot(-1) + C - D + \frac{7}{8}$
o sea $A - C + D = \frac{7}{8}$

Si $x=3$ entonces $26 = 3A + \frac{1}{8} + 9C + 9D + \frac{7}{8}\cdot 9$
o sea $A + 3C + 3D = 6$

Si $x=-1$ entonces $-2 = 27A + 9C - 3D - \dfrac{20}{8}$ o sea $27A + 9C - 3D = \dfrac{1}{2}$ se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones.

$$A - C + D = \frac{13}{8}$$

$$A + 3C + D = \frac{27}{8}$$

$$27A + 9C - 3D = \frac{-3}{8}$$

el cual se satisface para $A = \dfrac{3}{16}$, $C = \dfrac{-3}{16}$ y $D = \dfrac{5}{4}$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}\,dx &= \int \frac{\frac{3}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{8}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{-3}{16}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3}\,dx \\
&= \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{8}\int x^{-2}\,dx - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{4}\int (x-2)^2\,dx + \frac{7}{4}\int (x-2)^{-3}\,dx \\
&= \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{1}{8x} - \frac{3}{16}\ln|x-2| - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{7}{8(x-2)^2} + C
\end{aligned}$$

6 INTEGRAL DEFINIDA

6.1 Introdución

Antes de abocarnos al estudio de la integral definida y de la integral indefinida, daremos una pequeña semblanza histórica de la relación entre el cálculo diferencial y el integral.

A continuación transcribiremos algunos de los párrafos al respecto tomados del libro La Matemática: su contenido, métodos y significado (que se menciona en la bibliografía).

Durante la segunda mitad del siglo XVII, Newton y Leibniz dieron un paso decisivo en la matemática de las magnitudes variables, al sentar las bases del cálculon diferencial e integral. “Este fue el verdadero comienzo del análisis, puesto que el objeto de este cálculo son las propiedades de las funciones mismas, distinto del objeto de la geometría analítica que son las figuras geométricas. De hecho, lo que hicieron Newton y Leibniz fue completar esa cantidad inmensa de trabajo que habían desarrollado hasta entonces muchos matemáticos y que se extendía hasta los métodos de determinación de áreas y volúmenes empleados por los antiguos griegos”.

“Aquí solo queremos llamar la atención acerca de los orígenes de este cálculo, que fueron principalmente los nuevos problemas de la mecánica y los viejos problemas de la geometría, consistentes estos últimos en la determinación de tangentes a una curva dada y el cálculo de áreas y volúmenes. Estos problemas geométricos habían sido ya estudiados por los antiguos (basta mencionar a Arquímides), y también por Kepler, Cavalieri, y otros, a principios del siglo XVII. Pero el factor decisivo fue el descubrimiento de una notable relación entre estos dos tipos de problemas y la formulación de un método general para resolverlos; tal fue la obra de Newton y Leibniz.

Esta relación, que permitió conectar los problemas de la mecánica con los de la geometría, fue descubierta gracias a la posibilidad (brindada por el método de coordenadas) de hacer una representación gráfica de la dependencia de una variable respecto a la otra, o, en otras palabras, de una función. Con la ayuda de esta representación gráfica es fácil formular la relación antes mencionada entre los problemas de la mecánica y la geometría (relación que fue el origen del cálculo diferencial e integral) y describir así el contenido general de estos dos tipos de cálculo.

El cálculo diferencial es, básicamente, un método para encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado. Este problema se resuelve por “derivación” y es completamente equivalente al problema de dibujar una tangente a la curva que representa la dependencia de la distancia respecto del tiempo. La velocidad en el instante t es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto correspondiente a t.

El cálculo integral es en esencia un método para encontrar la distancia recorrida cuando se conoce la velocidad, y en general, de encontrar el resultado total de la acción de una magnitud variable. Evidentemente, este problema es recíproco del problema de cálculo diferencial (el problema de encontrar la velocidad), y se resuelve por “integración”. Resulta que el problema de la integración es en todo equivalente al de encontrar el área bajo la curva que representa la dependencia de la velocidad respecto al tiempo. La distancia recorrida en el intervalo de tiempo

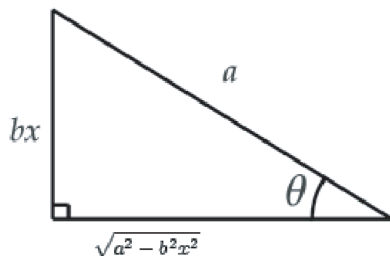


Figura 6.1

t_1 a t_2 es igual al área bajo la curva entre las rectas que corresponden en la gráfica a los valores t_1 a t_2.

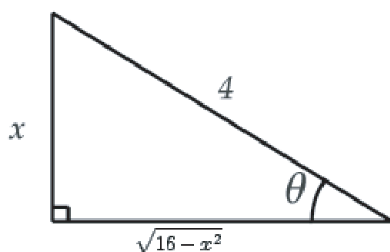


Figura 6.2

Haciendo abstracción de la formulación mecánica de los problemas y operando con funciones en vez de dependencias de distancia o velocidad respecto al tiempo se obtienen los problemas de cálculo diferencial e integral en forma abstracta.

Fundamental para el cálculo como para todo el desarrollo posterior del análisis, es el concepto de límite, que fue formulado algo más tarde que los otros conceptos fundamentales de variable y función. En los primeros días del análisis el papel que más tarde desempeñaría el límite, corrió a cargo de ese concepto algo nebuloso que es el infinitésimo. Los métodos para el cálculo real de la velocidad, conocida la distancia recorrida (a saber, la derivación), y de la distancia, conocida la velocidad (integración), se basaban en la unión del álgebra con el concepto de límite. El análisis se originó por la aplicación de estos conceptos y métodos a los referidos problemas de la mecánica y la geometría (y también a otros problemas: por ejemplo, los de máximos y mínimos). El análisis fue a su vez absolutamente necesario para el desarrollo de la mecánica, en la formulación de cuyas leyes ya se encontraban los conceptos analíticos en forma latente. Por ejemplo la segunda Ley de Newton, tal como él la formuló, establece que "la variación de la cantidad de movimiento es proporcional a la fuerza actuante" (con más precisión: el ritmo de variación del impulso es proporcional a la fuerza). Por consiguiente, si deseamos hacer uso de esta ley debemos estar en condiciones de definir el ritmo de variación de una variable, esto es, de derivarla. (Si establecemos la ley diciendo que la aceleración es proporcional a la fuerza, el problema es el mismo, porque la aceleración es proporcional al ritmo de variación del impulso). También está perfectamente claro que, para establecer la ley que rige un movimiento cuando la fuerza es variable (en otras palabras, cuando el movimiento tiene lugar con aceleración variable), es preciso resolver el problema inverso de encontrar una magnitud dado su ritmo de variación; en otras palabras, es preciso integrar. Así, pues, se puede decir que Newton se vio simplemente obligado a inventar la derivación y la integración con el fin de poder desarrollar la mecánica".

(Aleksandrov, 1979, 71).

6.2 La integral definida

Hemos visto entonces, "que el concepto de integral y en general del cálculo integral tuvo su origen histórico en la necesidad de resolver problemas concretos, uno de cuyos ejemplos más característicos es el cálculo del área de una figura curvilínea" (AlekSandrov, 1979,163).

Consideremos una curva situada sobre el eje X que representa la gráfica de la función con ecuación $y = f(x)$. Se desea encontrar el área S de la superficie limitada por la curva con ecuación $y = f(x)$, el eje X y las rectas paralelas al eje Y con ecuaciones $x = a$ y $x = b$. Para tal efecto, dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes, no necesariamente iguales como se muestra a continuación:

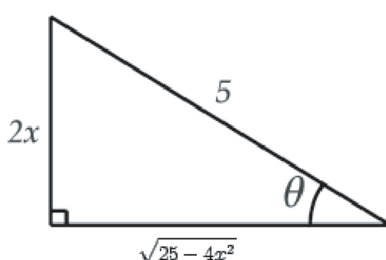


Figura 6.3

Denotamos con $\triangle x_1$ la longitud de la primera parte, la de la segunda parte con $\triangle x_2$ y así sucesivamente hasta la última $\triangle x_n$. En cada parte elegimos puntos r_1, r_2,...r_n, de tal forma que $f(r_1) \cdot \triangle x_1$ nos da el área del primer rectángulo, (Δx_1, es la base y $f(r_1)$ la altura), $f(r_2)\,\Delta x_2$ da el área del segundo rectángulo y por lo tanto $f(r_n) \cdot \triangle x_n$ da el área del enésimo rectángulo. Luego se tiene que:

$S_n = f(r_1) \cdot \triangle x_1 + f(r_2) \cdot \triangle x_2 + ... + f(r_n) \cdot \triangle x_n$

es la suma de las áreas de los rectángulos de la figura anterior.

Obsérvese que cuanto más fina sea la subdivisión de segmento $[a,b]$, más próxima estará S_n al área S. Si se considera una sucesión de tales valores por división del intervalo $[a,b]$ en partes cada vez más pequeñas, entonces la suma S_n tenderá a S. Al decir subdivisiones cada vez más pequeñas, estamos suponiendo no solo, que n crece indefinidamente, sino también que la longitud del mayor de los $\triangle x_i$, en la enésima división tiende a cero.

Luego:

$$S = \lim_{max\,\triangle x_i \to 0} [f(r_1) \cdot \triangle x_1 + f(r_2) \cdot \triangle x_2 + ... + f(r_n) \cdot \triangle x_n]$$

$$S = \lim_{max\,\triangle x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(r_i) \cdot \triangle x_i \right) \tag{6.1}$$

Por lo que el cálculo del área buscada se ha reducido a calcular el límite 6.1.

El cálculo del límite 6.1 también se presenta en otros problemas; por ejemplo, cuando se desea determinar la distancia S recorrida por un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta, con velocidad variable $v = f(t)$, en el intervalo de tiempo entre $t = a$ y $t = b$.

Supongamos que la función $f(t)$ es continua, o sea, que en intervalos pequeños de tiempo la velocidad solo varía ligeramente. Se divide el intervalo $[a,b]$ en n partes de longitudes $\triangle t_1, \triangle t_2, ..., \triangle t_n$. Para calcular un valor aproximado de la distancia recorrida en cada intervalo $\triangle t_i$, (con $i = 1, 2, ..., n$) vamos a suponer que la velocidad en este intervalo de tiempo es constante e igual a su verdadero valor en algún punto intermedio r_i. Luego, la distancia total recorrida estará expresada aproximadamente por la siguiente suma:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(r_i) \triangle t_i$$

siendo el verdadero valor de la distancia S recorrida en el tiempo $b - a$, el límite de tales sumas para subdivisiones cada vez más finas, o sea, que será el límite 6.1:

$$S = \lim_{max \triangle t_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(r_i) \cdot \triangle t_i \right)$$

Es necesario determinar ahora la conexión entre el cálculo diferencial y el integral, pero antes calculemos el área de la región limitada por la curva en ecuación $y = x^2$ y las rectas con ecuación $y = 0$, $x = 3$.

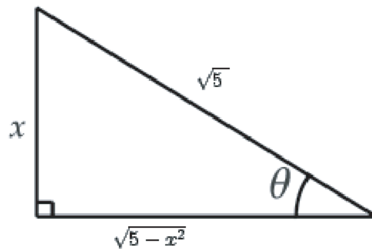


Figura 6.4

Dividimos el intervalo $[0,3]$ en n partes iguales de tal forma que la longitud de cada $\triangle x$ esté dado por $\dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$, y tomamos como puntos r_i los extremos derechos de cada segmento, por lo que

$r_0 = 0, \; r_1 = 0 + \triangle x, \; r_2 = 0 + 2\triangle x, ..., \; r_n = b = n\triangle x$

Luego:

$$\begin{aligned} S_n &= f(r_1)\cdot\triangle x + f(r_2)\cdot\triangle x + f(r_3)\cdot\triangle x + ... + f(r_n)\cdot\triangle x \\ &= (\triangle x)^2\triangle x + (2\triangle x)^2\triangle x + (3\triangle x)^2\triangle x + ... + (n\triangle x)^2\triangle x \\ &= (\triangle x)^3(1+2^2+3^2+...+n^2) \\ &= (\triangle x)^3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned} \tag{6.2}$$

La igualdad $1+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ puede comprobarse utilizando el método de indunción matemática.

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{3}{n}\right)^3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{9}{2}(1+0)(2+0) = 9$$

Por lo tanto, el área de la región es 9 unidades cuadradas.

Puede observarse que el procedimiento utilizado es bastante laborioso y depende del conocimiento de una serie de fórmulas como la señalada con 6.2. Es necesario por tanto establecer un procedimiento que agilice el cálculo del área de una región curvilínea y pa ra ello, vamos a establecer la relación existente entre el cálculo diferencial e integral.

El límite (A) recibe el nombre de integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$, donde $f(x)\,dx$ se llama integrando, los límites de integración son a y b, con "a" como límite inferior y "b" como límite superior. Debemos contar con un método general que permita el cálculo de las integrales definidas.

"Históricamente esta cuestión interesó a los matemáticos durante mucho tiempo, por la utilidad que ello suponía para el cálculo de áreas de figuras curvilíneas, volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, etc.

El número de problemas particulares que se consiguió resolver (cálculo de áreas, volúmenes, centros de gravedad de sólidos, etc.) fue creciendo gradualmente, pero los progresos en lo referente a encontrar un método general

fueron, al principio, extremadamente lentos. Dicho método sólo fue descubierto cuando se hubo acumulado suficiente material teórico y práctico, proporcionado por la experiencia diaria. El trabajo de recoger y generalizar este material avanzó muy lentamente hasta el final de la Edad Media; y su rápido desarrollo posterior fue una consecuencia directa del acelerado crecimiento del poder productivo de Europa como resultado de la desaparición de los primitivos métodos (feudales) de producción, y la aparición de otros nuevos (capitalistas).

La acumulación de datos relacionados con las integrales definidas marchó paralela a la investigación de problemas relacionados con la derivada de una función.

Esta inmensa labor preparatoria fue coronada con el éxito en el siglo XVIII por los trabajos de Newton y Leibniz. En este sentido se puede decir que Newton y Leibniz son los creadores del cálculo diferencial e integral.

Una de las contribuciones fundamentales de Newton y Leibniz fue que aclararon finalmente la profunda conexión entre el cálculo diferencial e integral, que proporciona, en particular, un método general para calcular las integrales definidas de una clase bastante amplia de funciones.

Para calcular esta conexión, analicemos un ejemplo tomado de la mecánica. Supongamos que un punto material se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad $y = f(t)$, donde t es el tiempo. Se sabe que la distancia δ recorrida por el punto en el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ a $t = t_2$ viene expresada por la integral definida:

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

Supongamos conocida la ecuación del movimiento del punto material; esto es, la función $s = F(t)$, que expresa la dependencia de la distancia s respecto al tiempo t a partir de un punto inicial A sobre la recta. La distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es evidentemente igual a la diferencia $\delta = F(t_2) - F(t_1)$

De este modo, consideraciones físicas llevan a la igualdad:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = F(t_2) - F(t_1)$$

que expresa la conexión entre la ecuación del movimiento del punto material y su velocidad.

Desde un punto de vista matemático la función $F(t)$ puede definirse como una función cuya derivada para todos los valores de t del intervalo dado es igual a $f(t)$, esto es:

$$F'(t) = f(t)$$

Una tal función se llama **primitiva** de $f(t)$.

Hay que tener en cuenta que si la función $f(t)$ tiene al menos una primitiva, entonces tiene un número infinito de ellas; porque si $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$; entonces $F(t) + C$ (donde C es una constante arbitraria) es también una primitiva. Además de este modo obtenemos todas las primitivas de $f(t)$ puesto que si $F_1(t)$ y $F_2(t)$ son primitivas de la misma función $f(t)$ entonces su diferencia $\phi(t) = F_1(t) - F_2(t)$, tiene una derivada $\phi'(t)$ que es igual a cero en todo punto del intervalo dado, por lo que $\phi'(t)$ es constante.

Nota: Por el teorema del valor medio $\phi(t) - \phi(t_0) = \phi'(v)(t - t_0) = 0$ donde v se encuentra entre t y t_0. Así $\phi(t_0) = \phi(t_0) =$ constante para todo t.

Desde un punto de vista físico los diferentes valores de la constante C determinan movimiento que sólo difieren entre sí en el hecho de que corresponden a todas las posibles elecciones del punto inicial del movimiento.

Se llega así al resultado de que para una clase muy amplia de funciones $f(x)$, que incluye todos los casos en los que la función $f(x)$ puede ser considerada como velocidad de un punto en el instante x se verifica la siguiente igualdad.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{6.3}$$

donde $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$.

Esta desigualdad es la famosa fórmula da Leibniz y Newton que reduce el problema de calcular la integral definida de una función a la obtención de una primitiva de la misma, y constituye así un enlace entre el cálculo diferencial e integral.

Muchos de los problemas concretos estudiados por los más grandes matemáticos se resuelven automáticamente con esta fórmula que establece sencillamente que la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es igual a la diferencia entre los valores de cualquiera de sus primitivas en los extremos superior superior e inferior del intervalo. La diferencia 6.3 se acostumbra escribir así:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(Aleksandrov, 1979, 166 − 169)

Por ejemplo, utilizando la fórmula de Newton-Leibniz puede calcularse $\int_0^3 x^2\,dx$, que determina el área de la región limitada por la curva con ecuación $y = x^2$ y las rectas con ecuaciones $y = 0$, $x = 3$ y $x = 0$, de la siguiente manera:

$$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9(ul)^2$$

Observe que $D_x\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{3x^2}{3} = x^2$, por lo que $\frac{x^3}{3}$ es una primitiva de x^2.

Veamos otro ejemplo en el que utilizamos esta fórmula:

Ejemplo 6.1

$$\int_2^4 (x^2+1)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_2^4 = \frac{4^3}{3} + 4 - \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) = \frac{62}{3}$$

Note que:

$Dx\left(\frac{x^3}{3} + x\right) = x^2 + 1$ por lo que $\frac{x^3}{3} + x$ es una primitiva de $x^2 + 1$

"De los razonamientos hechos al exponer la fórmula de Newton y Leibniz se desprende, claramente que esta fórmula es la expresión matemática a una conexión auténtica del mundo real. Es un bello e importante ejemplo de cómo la matemática da expresión a las leyes objetivas. Debemos observar que en sus investigaciones matemáticas Newton siempre adoptó un punto de vista físico. Sus trabajos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral no pueden ser separados de sus trabajos sobre los principios de la mecánica.

Los conceptos de análisis matemático -como la derivada o la integral- tal como se presentaban a Newton y sus contemporáneos, aún no había "roto" del todo con sus orígenes físico y geométrico (velocidad y área). De hecho era de un carácter mitad matemático y mitad físico. Las condiciones existentes en esa época no eran todavía las apropiadas para lograr una definición puramente matemática de esos conceptos. Por consiguiente, el investigador sólo podía manejarlos correctamente en situaciones complejas sí permanecía en contacto inmediato con los aspectos prácticos del problema incluso durante las etapas intermedias (matemáticas) de su razonamiento.

Desde este punto de vista el trabajo creador de Newton tuvo un carácter diferente del de Leibniz, ya que sus descubrimientos tuvieron lugar independientemente. Newton se djó guiar siempre por el enfoque físico de los problemas. En cambio las investigaciones de Leibniz no tienen una conexión tan inmediata con la física, hecho que, en ausencia de definiciones matemáticas precisas, le condujo a veces a conclusiónes equivocadas. Por otra parte el rasgo más caraterístico de la actividad creadora de Leibniz fue su esfuerzo por generalizar su búsqueda de los métodos más generales de resolución de los problemas del análisis matemático.

El mayor mérito de Leibniz fue la creación de un simbolismo matemático que expresaba lo esencial de la cuestión. Las notaciones por conceptos fundamentales del análisis matemático tales como la diferencial $dx,$ la diferencial segunda $d^2x,$ la integral $\int y\,dx,$ y la derivada d/dx fueron propuestas por Leibniz. El hecho de que estas notaciones se utilicen todavía muestra lo acertado de su elección.

Una de las ventajas de un simbolísmo bien elegido es que hace las demostraciones y cálculos más cortos y fáciles, y evita también, a veces, conclusiones equivocadas. Leibniz, quien no ignoraba esto, prestó especial atención en todo su trabajo a la elección de notaciones.

La evolución de los conceptos del análisis matemático (derivada, integra, etc.) continuó, naturalmente, después de Newton y Leibniz y continúa todavía en nuestros días; pero hay una etapa en esta evolución que merece ser destacada. Tuvo lugar a comienzos del siglo pasado y está particularmente relacionado con el trabajo de Cauchy.

Cauchy dio una definición formal precisa del concepto de límite y la utilizó como base para sus definiciones de continuidad, derivada, diferencial e integral. Estos conceptos se emplean constantemente en el análisis moderno. La gran importancia de estos resultados reside en el hecho de que gracias a ellos es posible operar de un modo puramente formal y llegar a conclusiones correctas no sólo en la aritmética, el álgebra y la geometría elemental, sino también en esa nueva y extensa rama de la matemática, el análisis matemático.

En cuanto a los resultados prácticos del análisis matemático se puede decir hoy lo siguiente: si los datos originales se toman del mundo real entonces el resultado de los razonamientos matemáticos también se verificará en él.

Y, si estamos completamente seguros de la precisión de los datos originales, no hay necesidad de hacer una comparación práctica de la exactitud de los resultados matemáticos, hasta comprobar la exactitud de los razonamientos formales.

Esta afirmación tiene naturalmente la siguiente limitación. En los razonamientos matemáticos los datos originales que tomamos del mundo real sólo son verdaderos con una cierta precisión. Esto significa que en cada etapa de razonamiento matemático los resultados obtenidos contendrán ciertos errores que, conforme avanza el razonamiento

(Por ejemplo de $a = b$ y $b = c$ sigue formalmente que $a = c$. Pero en la práctica esta relación aparece como sigue: del hecho de que $a = b$ con un error igual a ϵ y $b = c$ con un error también ϵ se sigue que $a = c$ con un error igual a 2ϵ) puede irse acumulando.

Volviendo ahora a la integral definida, consideremos una cuestión de capital importancia. ¿Para qué funciones $f(x)$ definidas sobre el intervalo $[a,b]$ es posible garantizar la existencia de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir, un número para el cual la suma $\sum_{i=1}^{n} f(r_i) \triangle x_i$ tenga límite cuando $max \triangle x_i \to 0$? Debe tenerse en cuenta que este número será el mismo para todas las subdivisiones del intervalo $[a,b]$ y para cualquier elección de puntos r_i. Las funciones para las cuales la integral definida es decir, el límite (A) existe se dicen integrables en el intervalo $[a,b]$. Investigaciones realizadas en el último siglo demostraron que todas las funciones continuas son integrables. Pero hay también funciones discontinuas que son integrables y entre ellas figuran por ejemplo las funciones que son acotadas y crecientes (o decrecientes) en el intervalo $[a,b]$.

La función que es igual a cero en los puntos racionales de $[a,b]$ e igual a uno en los puntos irracionales puede servir de ejemplo de función no integrable, puesto que para una subdivición arbitraria la suma s_n será igual a cero o a uno según elijamos los puntos r_i entre los números irracionales o racionales.

Señalamos que en muchos casos la fórmula de Newton y Leibniz proporciona la solución al problema de calcular una integral definida. Pero surge entonces el problema de encontrar una primitiva de una función dada, esto es, de encontrar una función que tenga por derivada la función dada.

Procedemos ahora a discutir este punto.

Observemos de paso que el problema de encontrar una primitiva tiene gran importancia entre otras ramas de la matemática particularmente en la solución de ecuaciones diferenciales.
(Aleksandrov, 1979, 170,173)

6.2.1 Propiedades fundamentales de la integral definida

Propiedad 6.1 Si k es un número real constante, y f es una función integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedad 6.2 Si f y g son dos funciones integrables en $[a,b]$ entonces $f+g$ también es integrable en $[a,b]$ y:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Prueba: Al final del capítulo.

Propiedad 6.3 Si f y g son dos funciones integrables en $[a,b]$ (con $a<b$) y además $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Prueba: Al final del capítulo.

Podemos ilustrar geométricamente la propiedad 6.3 como sigue:

Sea $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ para $x \in [a,b]$, además $g(x) \geq f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, como se muestra en la figura siguiente:

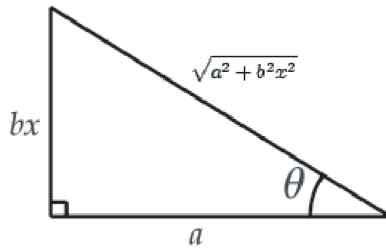


Figura 6.5

Note que el área del trapecio curvilíneo $a\,Q\,R\,b$ es mayor que el trapecio curvilíneo $a\,R\,S\,b$, por lo que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Propiedad 6.4 Si M y m son los valores máximo y mínimo respectivamente de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, con $a \leq b$, y además f es integrable en $[a,b]$ entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Prueba: Al final del capítulo.

Puede ilustrarse la propiedad 6.4 geométricamente como sigue: sea $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$ $(a < b)$ y consideremos la siguiente representación gráfica:

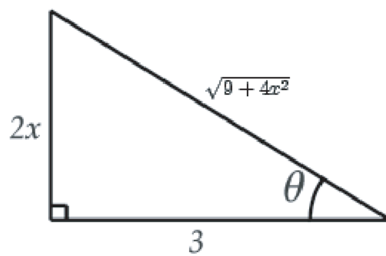
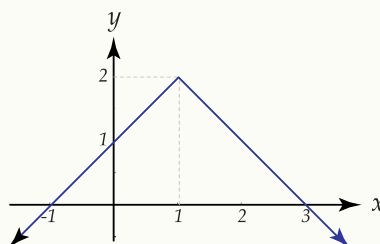


Figura 6.6

Note que el área del trapecio curvilíneo $a\,Q\,T\,b$ está comprendida entre las áreas de los rectángulos $a\,P\,U\,b$ y $a\,R\,S\,b$. (El área del rectángulo $a\,P\,U\,b$ es $m(b-a)$, la del rectángulo $a\,R\,S\,b$ es $M(b-a)$ y la del trapecio curvilínieo es $\int_a^b f(x)\,dx$

Ejemplo 6.2

Consideremos la región limitada por la curva con ecuación $y = x^2 + 1$ y las rectas cuyas ecuaciones son $x = 1$, $x = 3$; la representación gráfica es la siguiente:



Note que el valor mínimo que toma la función es 2 y el máximo es 10. El área del rectángulo $a\ P\ S\ b$ es $4\ (ul)^2$, la del rectángulo $a\ Q\ R\ b$ es $20\ (ul)^2$ y la del trapecio curvilíneo $a\ P\ R\ b$ es:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\ (ul)^2$$

Observe que $4 < \dfrac{26}{3} < 20$ y por tanto $2(3-1) < \displaystyle\int_1^3 x^2\,dx < 10(3-1)$

Teorema 6.1

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe en éste un punto α tal que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\alpha)$$

Prueba: Al final del capítulo.

Podemos dar una interpretación geométrica como sigue: consideremos una función f tal que $f(x) \geq 0$, para todos los valores de x en el intervalo $[a,b]$.

Entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la región limitada por la curva con ecuación $y = f(x)$, el eje X y las rectas con ecuaciones $x = a$, $x = b$

El teorema 6.1, establece que existe un número α en $[a,b]$ tal que el área del rectángulo $a\ Q\ S\ b$, cuya altura es $f(\alpha)$ y que tiene ancho de $(b-a)$ unidades, es igual al área de la región $a\ P\ R\ b$.

El valor de α no es necesariamente único.

Aunque el teorema no establece un método para determinar α, sí garantiza que existe un valor de α, lo cual se utiliza para demostrar otros teoremas.

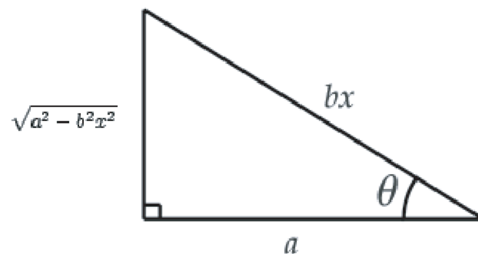


Figura 6.7

Ejemplo 6.3

Determinar, en cada caso, el valor de α tal que:

i. $\int_1^2 x^3\,dx = f(\alpha)(2-1)$

ii. $\int_1^4 (x^2+4x+5)\,dx = f(\alpha)(4-1)$

iii. $\int_{-2}^2 (x^2+1)\,dx = f(\alpha)(2+2)$ (Ejercicio para el estudiante)

Solución:

i. Calculemos primero $\int_1^2 x^3\,dx$

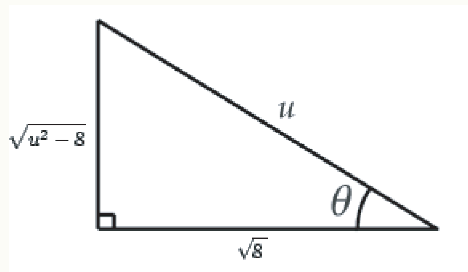
Como $D_x\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3$ entonces $\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big| = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

Luego $\int_1^2 x^3\,dx = \frac{15}{4} = f(\alpha)(2-1)$ de donde:

$f(\alpha) = \frac{15}{4}$ (en este caso $f(x) = x^3$)

$\alpha^3 = \frac{15}{4}$ y por último $\alpha = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \simeq 1{,}55$

Gráficamente se tiene:



ii. Calculemos $\int_1^4 (x^2+4x+5)\,dx$

Ejemplo 6.3 (continuación).

Como $D_x\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)=x^2+4x+5$ entonces:

$\int_1^4 x^2+4x+5=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\Big|_1^4=\frac{4^3}{3}+2(4)^2+5\cdot 4-(\frac{1}{3}+2+5)=66$

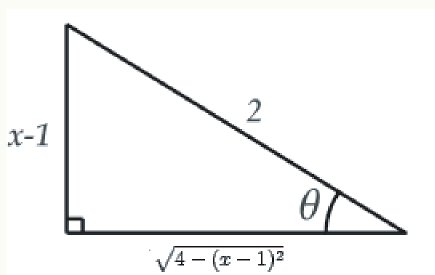
Luego: $\int_1^4(x^2+4x+5)=66=f(\alpha)(4-1)$

de donde $f(\alpha)=22,$ como $f(x)=x^2+4x+5$ entonces:

$\alpha^2+4\alpha+5=22$ y los valores de α que satisfacen la ecuación son $\alpha_1=-2+\sqrt{21}$, $\alpha_2=-2-\sqrt{21}$; este último valor se descarta pues no pertenece al intervalo $[1,4]$

Luego el valor de α que satisface el teorema del valor medio para integrales es $\alpha=\sqrt{21}-2$

Gráficamente se tiene:



Propiedad 6.5 Si f es una función integrable en los intervalos cerrados $[a,b]$, $[a,c]$ y $[c,b]$ con $a<c<b$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

Asumimos la propiedad 6.5 sin demostración.

Ejemplo 6.4

Sea $[a,b]=[0,3]$ y $c=2$

$$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9$$

Ahora: $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{8}{3} + 9 - \frac{8}{3} = 9$

Luego: $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + \int_0^3 x^2\,dx$

Geométricamente podemos interpretar la propiedad 6.5 como sigue:

Si $f(x)\geq 0$ para $x\in[a,b]$ entonces la propiedad 6.5 anterior establece que, el área de la región limitada por la curva con ecuación $y=f(x)$, el eje X las rectas con ecuación $x=a$, $x=b$, es igual a la suma de las áreas de las regiones desde "a" hasta c y desde c hasta b.

El resultado anterior es válido para cualquier orden de a, b y c, como se establece a continuación.

Teorema 6.2

Sea f una función integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y c.

Entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ sin importar cuál es el orden de a, b y c.

Para la prueba del teorema se necesitan las siguientes definiciones:

Definición 6.1

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ejemplo 6.5

$$\int_1^3 x\,dx \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\int_3^1 x\,dx \frac{x^2}{2}\Big|_3^1 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

Luego: $\displaystyle\int_1^3 x\,dx = -\int_3^1 x\,dx$

Definición 6.2

$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$ en este caso note que la longitud del trapecio curvilíneo es cero por lo que se área también es igual a cero.

Las definiciones 6.1 y 6.2 anteriores serán de gran utilidad al calcular el área de diversas regiones, como estudiaremos en el apartado de aplicaciones de la integral definida.

7 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida es una herramienta útil en las ciencias físicas y sociales, ya que muchas cantidades de interés en dichas ciencias pueden definirse mediante el tipo de suma que se presenta en la integral definida.

Antes de estudiar casos específicos en que se utiliza la integral definida, daremos las siguientes definiciones:

Definición 7.1

Recibe el nombre de *partición* de un intervalo cerrado $[a,b]$ un conjunto de intervalos cerrados:

$$\{[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]\}$$

que posee las propiedades:

1. $[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]\}=[a,b]$
2. $[x_{i-1},x_i]\cap[x_i,x_{i+1}]=x_i$ con $i\in\{1,2,\ldots,n\}$
3. $[x_{j-1},x_j]\cap[x_k,x_{k+1}]=\emptyset$ a menos que $k=j$ o $j-1=k+1$.

Definición 7.2

Cada intervalo en una partición de $[a,b]$ se llama subintervalo $[a,b]$. Una partición está determinada por los números que son puntos externos de los subintervalos de la partición. Así, una partición que contenga n subintervalos queda determinada por un conjunto de $n+1$ números.

$$\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\},$$

donde $x_0=a$, $x_n=b$, $x_{i-1}<x_i$ para $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Denotaremos con P_n la partición determinada por este conjunto de $n+1$ números, así:

$$P_n=\{[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]\}$$

Definición 7.3

Si P_n es una partición de un intervalo $[a,b]$, la *norma* N_p de P_n es el mayor de los n números

$$(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), (x_3 - x_2), \ldots, (x_n - x_{n-1}),$$

donde

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

o sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

La norma N_p de una partición P_n es la longitud del más grande de los subintervalos en la gráfica de P_n que se muestra a continuación:

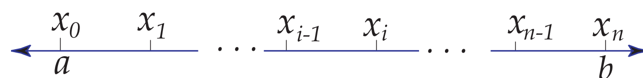


Figura 7.1

Definición 7.4

Si P_n es una partición en un intervalo $[a,b]$, un *aumento* T_n de la partición es un conjunto de números $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ tales que

$$x_0 \leq t_1 \leq x_1,\ x_1 \leq t_2 \leq x_2,\ x_2 \leq t_3 \leq x_3,\ \ldots,\ x_{n-1} \leq t_n \leq x_n,$$

o sea, $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ con $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Gráficamente:

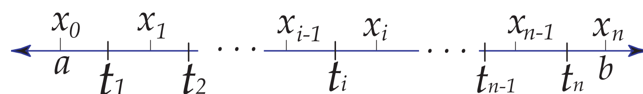


Figura 7.2

7.1 Cálculo de áreas

Sea f una función cuyo dominio está en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$.

Sea R la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = f(x)$, $y = 0$ (eje x), $x = a$, $x = b$.

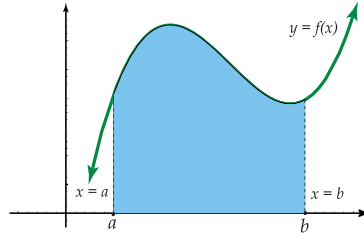


Figura 7.3

Sea P_n una partición de $[a,b]$ en n subintervalos determinados por el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un aumento de P_n.

Construimos n rectángulos cuyas bases sean los n intervalos de la partición P_n cuyas alturas sean

$$f(t_1),\ f(t_2),\ \ldots,\ f(t_i),\ \ldots,\ f(t_{n-1}),\ f(t_n).$$

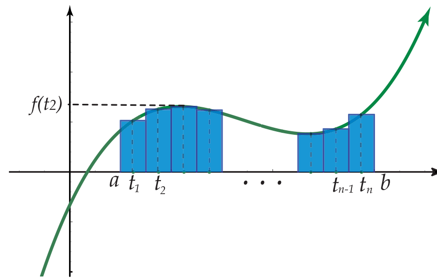


Figura 7.4

El área del i–ésimo rectángulo está dada por $f(t_i) \cdot \Delta x_i$; y la suma

$$\sum_{i=n}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

de las áreas de los n rectángulos será una aproximación al área de R.

Si aumentamos el número de subintervalos, entonces decrece la longitud de cada subintervalo de la partición P_n, obteniéndose una nueva suma que dará una mayor aproximación al área de R.

Demos ahora la siguiente definición:

Definición 7.5

Si $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$, y si existe un número A tal que dada una $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \;-A \right| < \epsilon$$

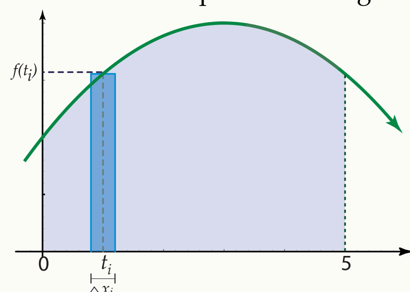
para toda partición P_n de $[a,b]$, y todo aumento de P_n en que $N_p < \delta$, entonces este número A es el área de la región limitada por las gráficas de la ecuación $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Note que de esta definición se tiene que: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \right) = A$ y si A existe, entonces: $A = \int_a f(x)$

Ejemplo 7.1

Calculemos el área de la región R limitada por las gráficas de $y = 1 + \dfrac{6x - x^2}{9}$, $y = 0$, $x = 5$, $x = 0$.

Solución: La representación gráfica es la siguiente:



$$y(t_i) = 1 + \frac{6t_i - t_i^2}{9}$$

El área del $i-$ésimo rectángulo es:

$$\left(1 + \frac{6t_i - t_i^2}{9} \right) \cdot \Delta x_i$$

La suma de aproximación para el área de R es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i - i^2}{9} \cdot \Delta x_i \right)$$

(En la gráfica anterior se muestra el $i-$ésimo rectángulo de la aproximación).

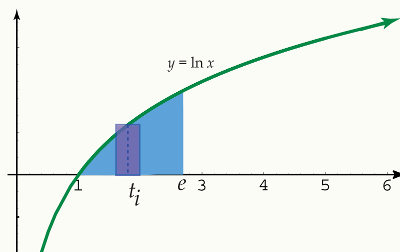
Luego de la definición **??** se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 \left(1 + \frac{6x - x^2}{9} \right) dx \\ &= \left(x + \frac{3}{9}x^2 - \frac{x^3}{27} \right) \Bigg|_0^5 \\ &= 5 + \frac{3}{9}(25) - \frac{125}{27} - 0 \\ &= \frac{235}{27} (u.l.)^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2

Calculemos el área de la región R limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Solución:
Graficamente se tiene:



Como $\ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$, entonces la curva interseca al eje x en el punto $(1,0)$. El área de la región R está dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e \ln x \, dx \\ &= (x \ln x - x)\Big|_1^e \\ &= e \ln e - e - \ln 1 + 1 \\ &= 1\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Se utilizó el método de integración "por partes".

7.2 Área de una región comprendida entre dos curvas

Sean f y g dos funciones con dominio en el intervalo $[a,b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a,b]$.
Vamos a determinar cuál es el área de la región R limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ que se muestra a continuación:

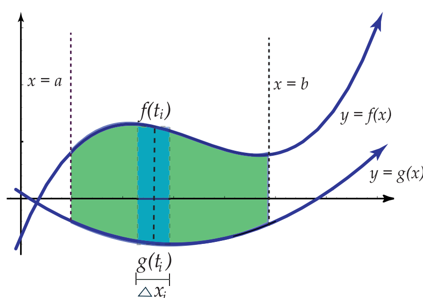


Figura 7.5

Construimos un conjunto de rectángulos tales que la suma de sus áreas sea una aproximación al área de R.

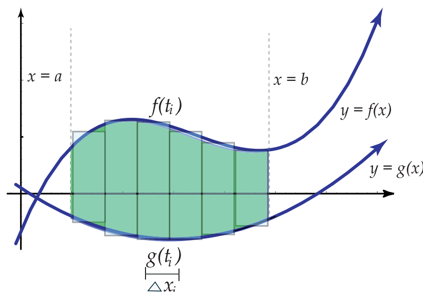


Figura 7.6

Sea P_n una partición de $[a,b]$ en n subintervalos determinados por el conjunto

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ un aumento de P_n. Construimos n rectángulos cuyos anchos sean los n subintervalos de la partición P_n, y cuyas alturas sean:

$$f(t_1) - g(t_1),\ f(t_2) - g(t_2),\ \ldots,\ f(t_i) - g(t_i),\ \ldots,\ f(t_n) - g(t_n).$$

El área del $i-$ésimo rectángulo es: $[f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$, y la suma de aproximación para el área de R está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$$

Si aumentamos el número de subintervalos, entonces decrece la longitud de cada subintervalo de la partición P_n, obteniéndose una nueva suma que dará una mayor aproximación al área de R.

Se tiene entonces la siguiente definición:

Definición 7.6

Si $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a,b]$, y si existe un número A, tal que dada una $\epsilon > 0$ exista una $\delta > 0$ para lo cual

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i - A \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a,b]$ y todo aumento de P_n con $N_p < \delta$, entonces dicho número A *es el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones* $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$.

De esta definición se tiene que:

$$A = \lim_{N_p \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$$

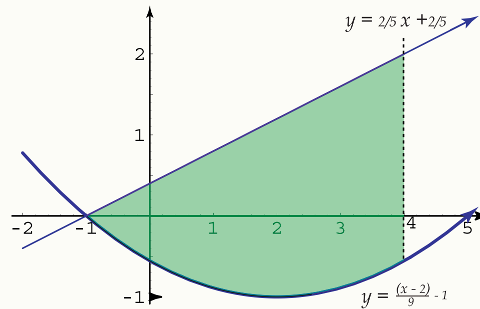
Si h es la función definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ para $x \in [a,b]$, y si A existe, entonces:

$$A = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejemplo 7.3

Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = \dfrac{(x-2)^2}{9} - 1$, $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{5}$, $x = 4$

Solución: Graficamente se tiene:



Note que las gráficas de $y = \dfrac{(x-2)^2}{9} - 1$, $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{5}$ se intersecan en el punto $(-1{,}0)$. En este caso, el área del $i-$ésimo rectángulo es:

$$\left[\left(\frac{2}{5}t_i + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{(t_i-2)^2}{9} - 1\right)\right] \cdot \Delta x_i$$

y la suma de aproximación está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{2}{5}t_i + \frac{2}{5} - \left[\frac{(t_i-2)^2}{9} - 1\right]\right\} \cdot \Delta x_i$$

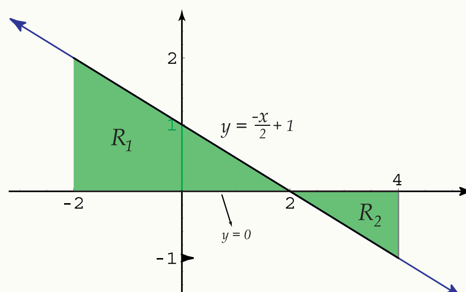
Según la definición **??** se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{4} \left[\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} - \frac{(x-2)^2}{9} + 1\right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{(x-2)^3}{27} + x\right]\Bigg|_{-1}^{4} \\ &= \frac{16}{5} + \frac{8}{5} - \frac{8}{27} + 4 - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{27}{27} - 1\right) \\ &= \frac{235}{27}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4

Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = \frac{-x}{2} + 1$, $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$.

Solución: Graficamente se tiene:



La recta con ecuación $y = \frac{-x}{2} + 1$ interseca al eje x en el punto $(2,0)$.

Note que la región R está formada por dos partes, las regiones R_1 y R_2, por lo que el área de R = área de R_1 + área de R_2.

La región R_1 está limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{-x}{2} + 1$, inferiormente por la de $y = 0$, lateralmente por la de $x = -2$ y $x = 2$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\text{área de } R_1 &= \int_{-2}^{2} \left(\frac{-x}{2} + 1 - 0 \right) dx \\
&= \left(\frac{-x^2}{4} + x \right) \Big|_{-2}^{2} \\
&= 4 \, (u.l.)^2
\end{aligned}$$

La región R_2 está limitada superiormente por la gráfica de $y = 0$, inferiormente por la de $y = \frac{-x}{2} + 1$, lateralmente por la de $x = 2$ y $x = 4$.

Luego:

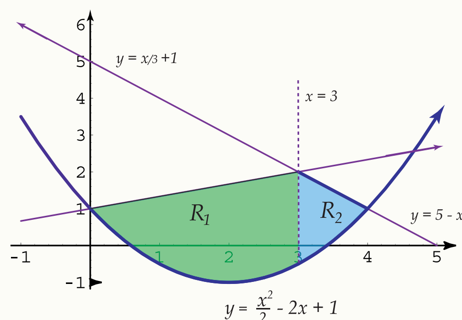
$$\begin{aligned}
\text{área de } R_2 &= \int_{2}^{4} \left[0 - \left(\frac{-x}{2} + 1 \right) \right] dx \\
&= \int_{2}^{4} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \\
&= \left(\frac{x^2}{4} - x \right) \Big|_{2}^{4} \\
&= 1 \, (u.l.)^2
\end{aligned}$$

Por tanto, el área de R es igual a: $4 + 1 = 5 \, (u.l.)^2$.

Ejemplo 7.5

Hallar el área de la región R señalada en la figura adjunta, que está limitada por las gráficas de las ecuaciones:

$y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$, $y = \dfrac{x}{3} + 1$, $y = -x + 5$.



Solución: R puede dividirse en dos regiones R_1 y R_2.

Las rectas con ecuaciones $y = \dfrac{x}{3} + 1$, $y = -x + 5$ se intersecan en el punto $(3,2)$ (*¡compruébelo!*).

La recta con ecuación $y = -x + 5$ y la parábola se intersecan en el punto $(4,1)$.

La recta con ecuación $y = \frac{x}{3} + 1$ y la parábola se intersecan en el punto $(0,1)$

Luego: área de R = área de R_1 + área de R_2

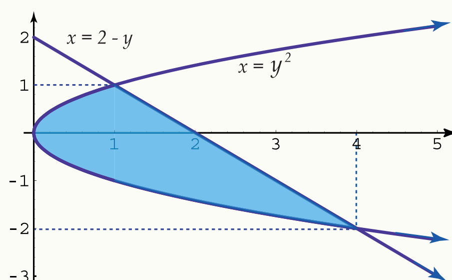
$$
\begin{aligned}
\text{área de } R_1 &= \int_0^3 \left[\frac{x}{3} + 1 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1 \right) \right] dx \\
&= \int_0^3 \left[x - \right] dx \\
&= \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^3 \\
&= 6\,(u.l.)^2 \\
\text{área de } R_2 &= \int_3^4 \left[-x + 5 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1 \right) \right] dx \\
&= \int_3^4 \left(4 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \left(4x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_3^4 \\
&= \frac{31}{3}\,(u.l.)^2
\end{aligned}
$$

Entonces: área de $R = 6 + \dfrac{31}{3}\,(u.l.)^2$.

Ejemplo 7.6

Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = x$, $y = -x + 2$.

Solución: La representación gráfica es la siguiente:



Las gráficas se intersecan en los puntos $(1,1)$ y $(4,-2)$ (Verifíquelo algebraicamente).

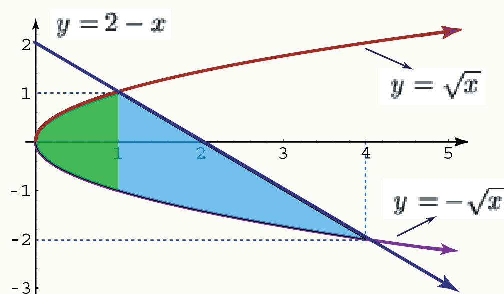
En esta caso podemos tomar "y" como variable independiente y x como la variable dependiente, es decir, $x = g(y) = 2 - y$.

Así el área de la región R está dada por:

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{1}(2 - y - y^2)dy \\ = & \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} \\ = & \frac{9}{2}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Otra forma de obtener el área de la región R es la siguiente:

$y = \sqrt{x}$ $y = -\sqrt{x}$ $y = 2 - x$



Ejemplo 7.6 (continuación).

Dividimos la región R en dos regiones R_1 y R_2. La región R_1 está limitada superiormente por la gráfica de $y = \sqrt{x}$, inferiormente por la de $y = -\sqrt{x}$, lateralmente por la de $x = 1$ y $x = 0$.

Así:

$$\begin{aligned} \text{área de } R_1 &= \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right] dx \\ &= \int_0^1 2\sqrt{x}dx \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{x})^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{3}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

La región R_2 está limitada superiormente por la gráfica de $y = -x + 2$, inferiormente por la de $y = -\sqrt{x}$, lateralmente por la de $x = 1$.

Luego:

$$\begin{aligned} \text{área de } R_2 &= \int_1^4 \left[-x + 2 - (-\sqrt{x})\right] dx \\ &= \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Big|_1^4 \\ &= \frac{19}{6}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{área de } R &= \text{área de } R_1 + \text{área de } R_2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{19}{6} \\ &= \frac{27}{6}\,(u.l.)^2. \end{aligned}$$

7.3 Volúmenes de sólidos de revolución

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$.

Recibe el nombre de *sólido de revolución*, el sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo.

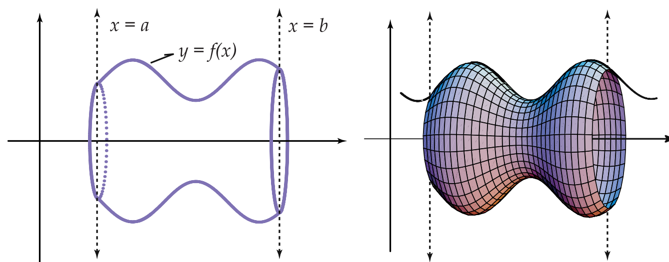


Figura 7.7

Para determinar el volumen de este tipo de sólidos, seguiremos un procedimiento similar al utilizado para el área de una región, aproximando el "volumen" de un sólido de revolución por medio de una suma de volúmenes de sólidos más elementales, en los que el volumen ya ha sido definido.
Vamos a considerar discos o cilindros circulares como los sólidos elementales, asumiendo que el volumen de un disco circular es, por definición, el producto del área A de la base por el espesor h (o altura).

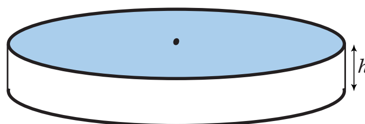


Figura 7.8

Consideremos una partición P_n del intervalo $[a,b]$ determinada por el conjunto de números

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, con $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un aumento de P_n.

Consideremos ahora los n discos circulares, cuyos sensores son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$, y cuyas bases tienen radios $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_i), \ldots, f(t_n)$.

El volumen del $i-$ésimo disco es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

La suma

$$\sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

de los volúmenes de los n discos nos da una aproximación al volumen del sólido de revolución.

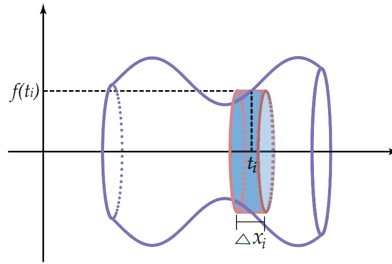


Figura 7.9

Podemos suponer que mientras más delgados sean los discos, mayor será la aproximación de la suma anterior al volumen del sólido.

Se tiene entonces la siguiente definición:

Definición 7.7

Si existe un número V tal que dada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i - V \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a,b]$ y todo aumento T_n de P_n, y con $N_p < \delta$, este número V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ alrededor del eje x.

Si h es la función dada por $h(x) = \pi[f(x)]^2$ para $x \in [a,b]$, entonces la suma de aproximación:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

utilizada en la definición del volumen del sólido de revolución, puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{n} h(t_i) \cdot \Delta x_i$$

donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$.

Luego, de la definición de integral y de la definición de V dada, se tiene que

$$V = \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$

Consideremos ahora dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a,b]$. Sea R la región del plano limitada por las curvas con ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas con ecuaciones $x = a$, $x = b$.

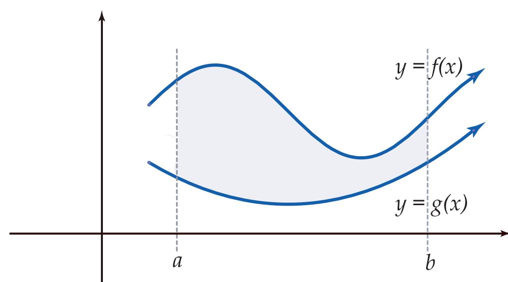


Figura 7.10

Deseamos determinar el volumen V del sólido de revolución generado al girar la región R alrededor del eje x (note que en este caso *no* giramos la región R alrededor de una de sus fronteras).

El sólido generado se muestra en la siguiente figura:

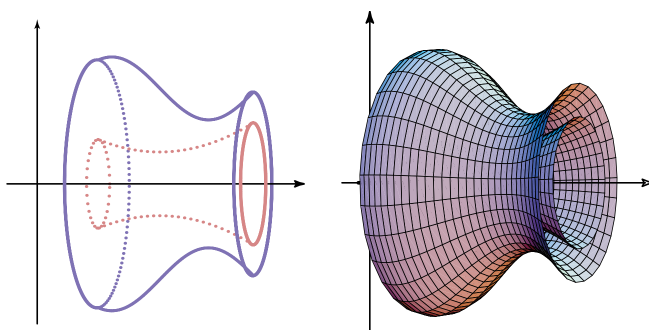
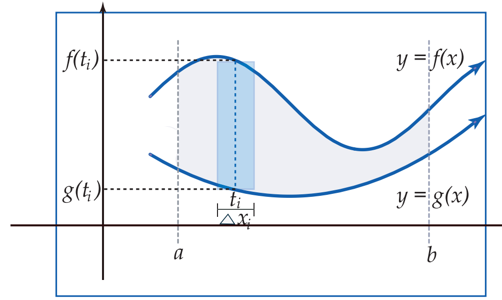


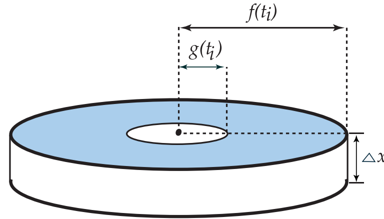
Figura 7.11

Sea P_n una partición del intervalo $[a,b]$ determinada por el conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n\}$ un aumento de P_n.

En este caso, los sólidos elementales usados para obtener una suma de aproximación del volumen del sólido de revolución, serán anillos circulares.

Se muestra a continuación el $i-$ésimo rectángulo y el $i-$ésimo anillo circular generado al rotar aquel alrededor del eje x.





Luego, el área del anillo circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 - \pi[g(t_i)]^2$$

por lo que el volumen del $i-$ésimo elemento sólido será:

$$\Delta V_i = \pi\left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\right) \cdot \Delta x_i$$

Entonces, la suma de aproximación para el volumen del sólido de revolución es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\right) \cdot \Delta x_i$$

Puede suponerse que mientras más delgados sean los anillos circulares, mayor será la aproximación de la suma anterior al volumen del sólido.

Definición 7.8

Si existe un número V tal que dada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \pi\left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\right)\Delta x_i - V \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a, b]$ y todo aumento T_n de P_n, y con $N_p < \delta$, este número de V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, alrededor del eje x.

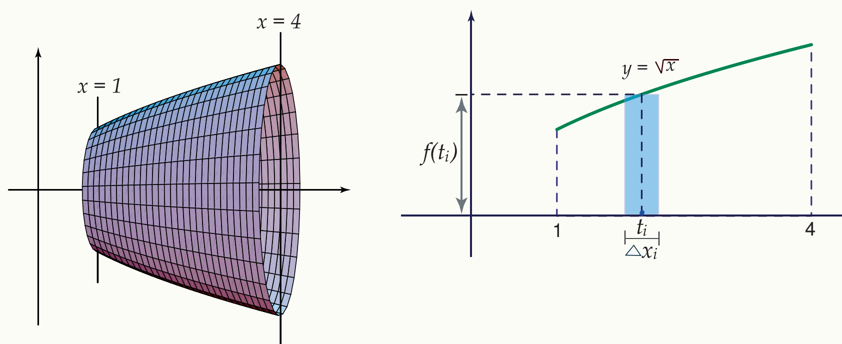
Si h es la función dada por $h = \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)$ para $x \in [a,b]$, entonces la suma $\sum_{i=1}^{n} \pi\left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\right) \cdot \Delta x_i$ utilizada en la definición 7.8, puede escribirse como: $\sum_{i=1}^{n} h(t_i)\,\Delta x_i$, donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Luego se tiene que:

$$V = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

Ejemplo 7.7

Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Solución:



Observe, en la figura de la derecha, $i-$ésimo rectángulo que al rotar alrededor del eje x genera un disco circular en forma de cilindro circular recto.

El volumen del $i-$ésimo disco circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi(\sqrt{t_i})^2 \cdot \Delta x_i$$

La suma de aproximación del volumen:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(\sqrt{t_i})^2 \cdot \Delta x_i$$

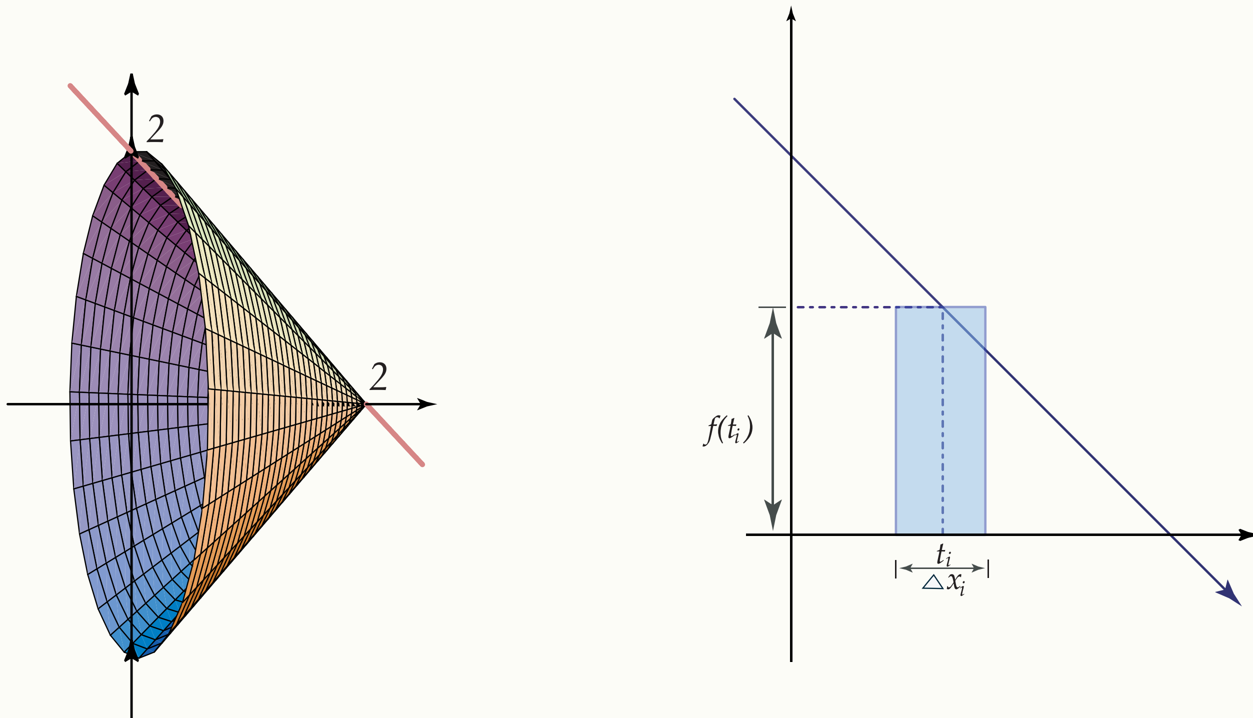
El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi x\,dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 \\ &= 8\pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{15}{2}\pi\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.8

Hallar el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de $y = 2 - x$, $x = 0$, $y = 0$ gira alrededor del eje x.

Solución: La representación gráfica del sólido de revolución es la siguiente:



El volumen del $i-$ésimo disco circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi[2 - t_i]^2 \cdot \Delta x_i$$

La suma de aproximación del volumen es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(2 - t_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

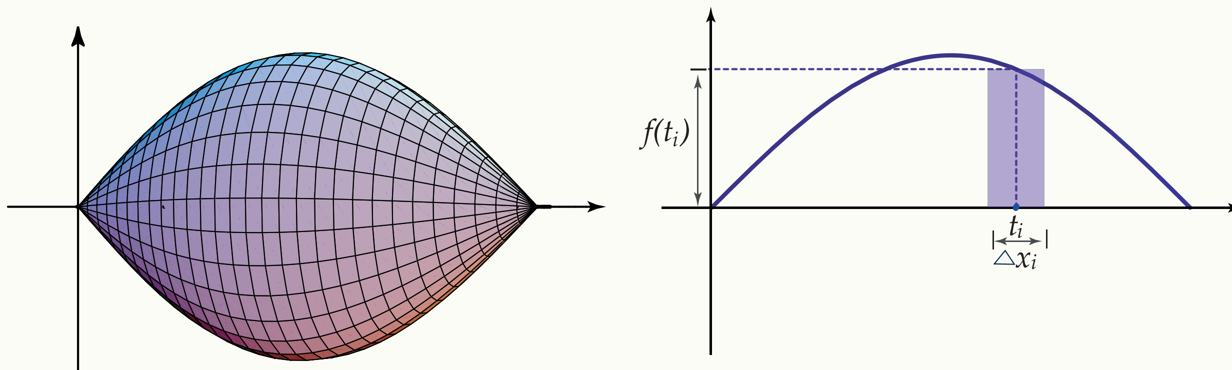
Luego, si $f(x) = 2 - x$, entonces el volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^2 [f(x)]^2\,dx &= \pi \int_0^2 (2-x)^2\,dx \\ &= \frac{-\pi}{3}(2-x)^3 \Big|_0^2 \\ &= \frac{8\pi}{3}\,(u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.9

Hallar el volumen engendrado cuando la superficie limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$, y las rectas con ecuaciones $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$, gira en torno al eje x.

Solución: La representación gráfica es la siguiente:



Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces:

1. El volumen del $i-$ésimo rectángulo es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi(\operatorname{sen} t_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

2. La suma de aproximación del volumen es:

$$\sum_{i_1}^{n} \pi(\operatorname{sen} t_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

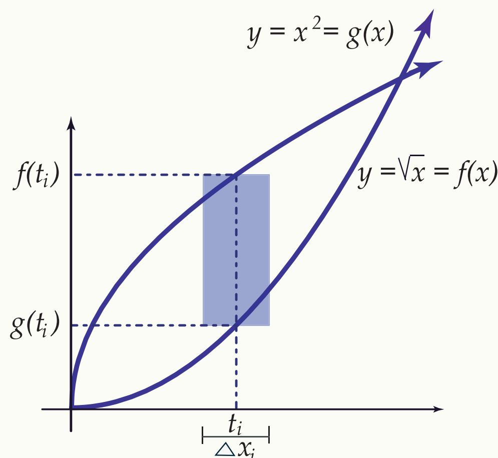
3. El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \pi(\operatorname{sen} x)^2 \, dx &= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \, (u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.10

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Solución: La representación gráfica de la región y del $i-$ésimo rectángulo es la siguiente:



El volumen del $i-$ésimo anillo circular es:

$$\pi\left([\sqrt{t_i}]^2 - [t_i^2]^2\right) \cdot \Delta x_i$$

La suma de aproximación del volumen es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\left([\sqrt{t_i}]^2 - [t_i^2]^2\right) \cdot \Delta x_i$$

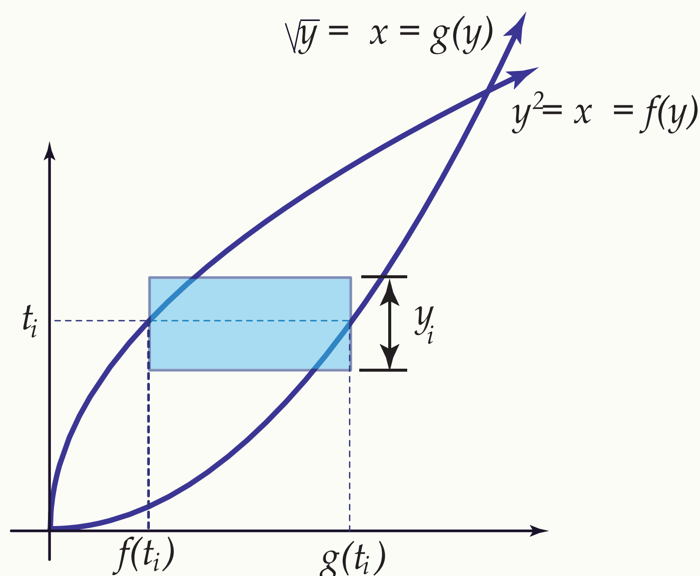
Luego, el volumen del sólido de revolución está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] dx \\ &= \pi \int \left(x - x^4\right) dx \\ &= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0 \\ &= \frac{3}{10}\,\pi\,(u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.11

Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo anterior, alrededor del eje y.

Solución:



El anillo circular tiene como radio máximo $g(t_i)$, y como radio mínimo $f(t_i)$.

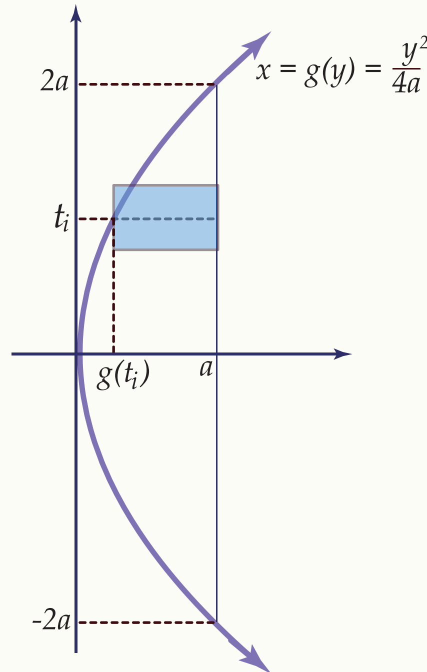
En este caso tomamos x como la variable dependiente, y se tiene que el volumen del sólido está dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\left([g(y)]^2 - [f(y)]^2\right) dy \\
&= \int_0^1 \pi\left[(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2\right] dy \\
&= \int_0^1 \pi\left(y - y^4\right) dx \\
&= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{10}\pi\ (u.l.)^3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.12

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje y, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, $a > 0$, que intercepta la recta $x = a$

Solución: La representación gráfica de la región y del $i-$ésimo rectángulo es la siguiente:



El anillo circular tiene como radio máximo $x = a$, y como radio interior $x = \dfrac{y^2}{4a}$.

Tomamos x como la variable dependiente.

El volumen del sólido está dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2a}^{2a} \pi \left[a^2 - \left(\frac{y^2}{4a} \right)^2 \right] dy \\
&= \pi \int_{-2a}^{2a} \left(a^2 - \frac{y^4}{16a^2} \right) dx \\
&= \pi \left(a^2 y - \frac{y^5}{80a^2} \right) \Bigg|_{-2a}^{2a} \\
&= \pi \left(2a^3 - \frac{32a^5}{80a^2} \right) - \pi \left(-2a^3 + \frac{32a^5}{80a^2} \right) \\
&= \frac{16}{5} a^3 \pi \, (u.l.)^3
\end{aligned}
$$

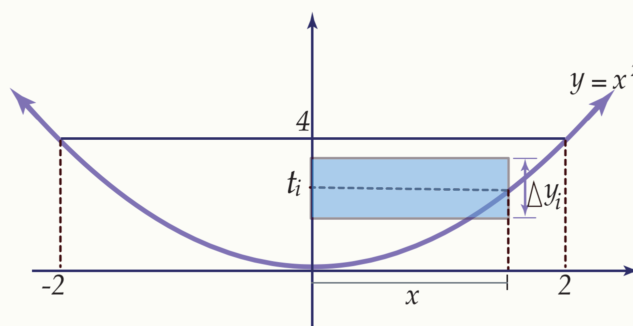
Ejemplo 7.13

Determinar el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 4$, gira alrededor de:

1. el eje y
2. la recta con ecuación $y = 4$
3. el eje x
4. la recta con ecuación $y = -1$
5. la recta con ecuación $x = 2$

Solución:

1. La región en el plano xy que gira alrededor del eje y es la siguiente:



Se tiene que el radio del sólido generado es:

$$x = \sqrt{y}$$

El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

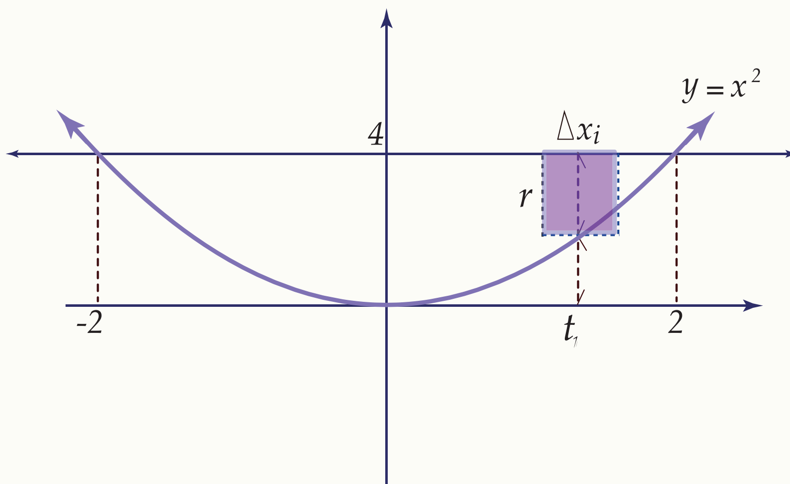
$$\pi[\sqrt{t_i}]^2 \cdot \Delta y_i$$

El volumen del sólido está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi[\sqrt{y}]^2\, dy \\ &= \int_0^4 \pi\, y\, dy \\ &= \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 \\ &= 8\pi\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.13 (continuación).

1. La región gira alrededor de la recta con ecuación $y = 4$



El radio del $i-$ésimo disco circular es:

$$4 - t_i^2$$

El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\pi\left[4 - t_i^2\right]^2 \cdot \Delta x_i$$

En general, el radio del sólido generado es:

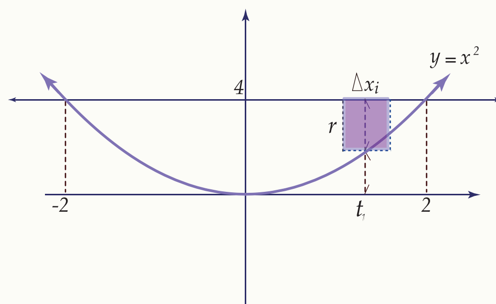
$$4 - y = 4 - x^2$$

Luego, el volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} \pi\left(4 - x^2\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\
&= \pi\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\
&= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \pi\left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{512}{15}\pi\,(u.l.)^3
\end{aligned}$$

2. Note que al girar la región alrededor del eje x, el $i-$ésimo elemento sólido tiene como base un anillo circular.

Ejemplo 7.13 (continuación).



El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\left[\pi(4)^2 - \pi(t_i^2)^2\right] \cdot \Delta x_i$$

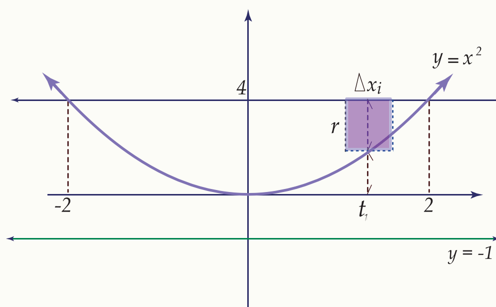
Luego, el volumen del sólido generado está dado por la siguiente integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} \pi\left[16 - (x^2)^2\right] dx \\ &= \int_{-2}^{2} \pi\left(16 - x^4\right) dx \\ &= \pi\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2} \\ &= \pi\left(32 - \frac{32}{5}\right) - \pi\left(-32 + \frac{32}{5}\right) \\ &= \frac{256}{5}\pi\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

1. La región gira alrededor de la recta con ecuación $y = -1$

   El radio máximo del anillo circular es $y = 5 = 4 + |-1|$

   El radio interior del anillo es $y = x^2 + |-1| = x^2 + 1$



El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\left[\pi(5)^2 - \pi\left(t_i^2 + 1\right)^2\right] \cdot \Delta x_i$$

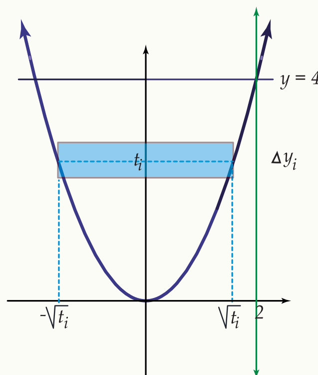
Ejemplo 7.13 (continuación).

El volumen del sólido generado está dado por la siguiente integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} \left[25\pi - \pi\left(x^2+1\right)^2\right] dx \\ &= \int_{-2}^{2} \pi\left(25 - x^4 - 2x^2 - 1\right) dx \\ &= \pi\left(24x - \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} \\ &= \pi\left(48 - \frac{32}{5} - \frac{16}{3}\right) - \pi\left(-48 + \frac{32}{5} + \frac{16}{3}\right) \\ &= \frac{1088}{15}\pi\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

1. La región gira alrededor de la recta con ecuación $x = 2$

De nuevo, el $i-$ésimo elemento sólido tiene como base un anillo circular, cuyo radio máximo es $2 + |-\sqrt{t_i}|$, y cuyo radio interior es $2 - \sqrt{t_i}$.



El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

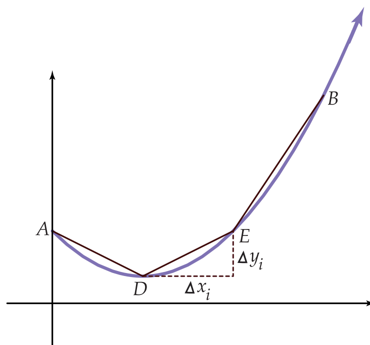
$$\left[\pi(2+\sqrt{t_i})^2 - \pi(2-\sqrt{t_i})^2\right] \cdot \Delta y_i$$

Luego, el volumen del sólido está dado por la siguiente integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{4} \left[\pi(2+\sqrt{y})^2 - \pi(2-\sqrt{y})^2\right] dy \\ &= \pi\int_{0}^{4} 8\sqrt{y}\, dy \\ &= 8\pi\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_{0}^{4} \\ &= \frac{16}{3}\pi\sqrt{y^3}\Big|_{0}^{4} \\ &= \frac{128}{3}\pi\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

7.4 Longitud de una curva plana

Vamos a determinar la longitud s del arco de una curva con ecuación $y = f(x)$, comprendida entre los puntos $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.



Como se muestra en la figura anterior, dividimos el arco AB en n partes, uniendo luego los sucesivos puntos de división por segmentos rectilíneos.

Por ejemplo, el segmento DE tendrá como longitud

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Luego, tendremos una aproximación de la longitud de la curva AB, mediante la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Si aumentamos indefinidamente el número de puntos de división, entonces las longitudes de los segmentos tienden a cero, por lo que:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

nos da el arco AB, siempre que el límite exista.

Para expresar el límite como una integral tenemos lo siguiente: supongamos que la función con ecuación $y = f(x)$ es continua y posee derivada continua en cada punto de la curva, donde $A(a, f(a))$ hasta $B(b, f(b))$. Luego, por el teorema del valor medio para derivadas, existe un punto $D^*(x_i^*2, y_i^*)$ entre los puntos D y E de la curva, donde la tangente es paralela a la cuerda DE, esto es:

$f\,(x_i^*) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ o sea $\Delta y_i = f\,(x_i^*) \cdot \Delta x_i$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+\left[f'(x_i^*)\cdot\Delta x_i\right]^2}$$
$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left[f'(x_i^*)\right]^2}\cdot\Delta x\right)$$

que por definición corresponde a la integral: $\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ (hemos expresado $f'(x)$ como dy/dx).

Como la longitud de una curva no depende de la elección de los ejes coordenados, si x puede expresarse como función de y, entonces la longitud del arco está dada por

$$\int_{f(a)}^{f(b)}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

En cada caso calcular la longitud del arco de curva que se indica.

Ejemplo 7.14

$y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, desde $x=0$ hasta $x=3$.

Solución:
Designemos con L la longitud del arco.

Como $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, entonces $\frac{dy}{dx}=x\sqrt{x^2+2}$

Luego:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^3\sqrt{1+\left[x\sqrt{x^2+2}\right]^2}\,dx\\
&= \int_0^3\sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx\\
&= \int_0^3\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx\\
&= \int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx\\
&= \int_0^3(x^2+1)\,dx\\
&= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^3\\
&= 12
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.15

$9x^2 = 4y^3$, desde $(0,0)$ hasta $(2\sqrt{3},3)$

Solución: En este caso, tomemos x como variable dependiente y obtengamos $\dfrac{dx}{dy}$ por medio de derivación implícita: $18x\dfrac{dx}{dy} = 12y^2$ de donde $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y^2}{3x}$. Luego, la longitud L del arco está dada por:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{2y^2}{3x}\right)^2}\,dy \\ &= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{4y^4}{9x^2}}\,dy \\ &= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{4y^4}{4y^3}}\,dy \\ &= \int_0^3 \sqrt{1+y}\,dy \\ &= \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.16

$x = \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{1}{8y^2}$, desde $y = 1$ hasta $y = 2$

Solución: Obtenemos de nuevo $\dfrac{dx}{dy}$, pues $x = h(y)$. Así, $\dfrac{dx}{dy} = y^3 - \dfrac{1}{4y^3} = \dfrac{4y^6-1}{4y^3}$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } L &= \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{4y^6-1}{4y^3}\right)^2} \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{16y^6+16y^{12}-8y^6+1}{16y^6}}\,dy \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{16y^{12}+8y^6+1}}{4y^3}\,dy \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{(4y^6+1)^2}}{4y^3}\,dy \\ &= \int_1^2 \frac{4y^6+1}{4y^3}\,dy \\ &= \int_1^2 \left(y^3+\frac{1}{4}y^{-3}\right)dx = \left(\frac{y^4}{4}-\frac{1}{8y^2}\right)\Big|_1^2 = \frac{123}{32} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.17

$(y+1)^2 = 4x^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$

Solución: Obtengamos $\frac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita:

$$2(y+1)\frac{dx}{dy} = 12x^2 \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{y+1}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{6x^2}{y+1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{36x^4}{(y+1)^2}}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{36x^4}{4x^3}}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\, dx \\
&= \frac{2}{27}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{27}(10)^{3/2} - \frac{2}{27} \\
&= \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1)
\end{aligned}$$

7.5 Cálculo de trabajo con ayuda de la integral definida

Vamos a estudiar la aplicación de la integral definida al concepto de "trabajo".

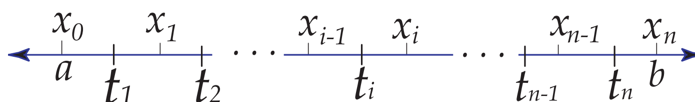
Si una fuerza constante F actúa sobre un objeto desplazándolo una distancia x, a lo largo de una línea recta, y la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento, entonces el trabajo realizado W se expresa como el producto de la fuerza F por el camino recorrido.

Es decir: $W = F \cdot x$.

Cuando la fuerza *no* es constante, por ejemplo, cuando se contrae o estira un resorte, el trabajo no se puede expresar en forma tan simple.

Consideremos una partícula P que se desplaza sobre el eje x, desde el punto $(a,0)$ al punto $(b,0)$ por medio de una fuerza $f = F(x)$, $x \in [a,b]$.

Dividamos el segmento $[a,b]$ en n partes arbitrarias de longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$, y tomemos en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario t_i como se muestra a continuación.



Cuando la partícula se mueve de x_{i-1} a x_i, el trabajo realizado es aproximadamente igual al producto $F(t_i) \cdot \Delta x_i$.

Luego, la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} F(t_i) \cdot \Delta x_i$$

nos dará la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo el segmento $[a,b]$.

La suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(t_i) \cdot \Delta x_i$$

representa una suma integral, por lo que si

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(t_i) \cdot \Delta x_i$$

existe, entonces este expresa el trabajo realizado por la fuerza $f = F(x)$ al mover una partícula de a a b, a lo largo del eje x.

Se tiene entonces que

$$W = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(t_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx$$

siendo $F(x)$ la fuerza aplicada a la partícula cuando ésta se encuentra en el punto cuya coordenada es x.

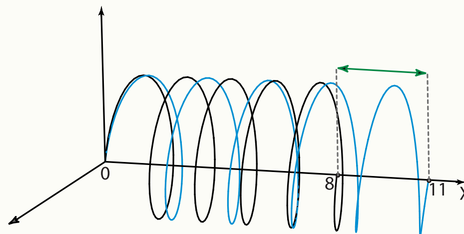
Si la unidad de fuerza es el kilogramo, y si la unidad de distancia es el metro, entonces la unidad de trabajo es el *kilográmetro*. También pueden utilizarse como unidades de trabajo la libra-pie y el gramo-centímetro.

El alargamiento o la compresión de un resorte helicoidal, nos proporciona un ejemplo del trabajo realizado por una fuerza variable. La ley de Hooke afirma que la fuerza necesaria para estirar un resorte helicoidal, es proporcional a la elongación del resorte. Así, la fuerza necesaria para producir una elongación de x unidades, está dada por la expresión $F = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad, que depende del material, del grosor del alambre, de la temperatura, etc.

Ejemplo 7.18

Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulgadas. Si una fuerza de 20 libras estira el resorte $1/2$ pulgada, determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 8 pulgadas a 11 pulgadas.

Solución: Consideremos el resorte ubicado a lo largo del eje x, con su extremo fijo en el origen:



Por la ley de Hooke se sabe que $F = kx$. Como $x = 0{,}5$ pulgadas cuando $F = 20$ libras, entonces $20 = k(0{,}5)$ de donde $k = 40$.

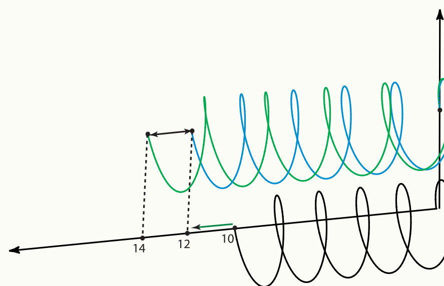
Luego, $F = 40x$. Se desea calcular el trabajo realizado por esta fuerza si aumenta la extensión de 8 a 11 pulgadas. Luego:

$$W = \int_0^3 40x\,dx = 20x^2\Big|_0^3 = 180 \text{ pulgadas-libras.}$$

Ejemplo 7.19

Un resorte tiene una longitud natural de 10 pulgadas, y una fuerza de 30 libras lo estira 11,5 pulgadas. Determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 10 pulgadas a 12 pulgadas. Luego encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de 12 pulgadas a 14 pulgadas.

Solución: Como $F = kx$, y $x = 11{,}5$ pulgadas, cuando $F = 30$ libras, entonces $30 = 11{,}5k$, por lo que $k = 60/23$.



El trabajo realizado para estirar el resorte de 10 a 12 pulgadas está dado por:

$$W = \int_0^2 \frac{60}{23}x\,dx = \frac{30}{23}x^2\Big|_0^2 = \frac{120}{23} \text{ pulgadas-libras}$$

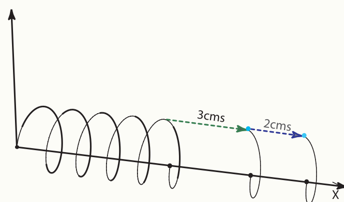
El trabajo realizado para estirar el resorte de 12 a 14 pulgadas está dado por:

$$W = \int_2^4 \frac{60}{23}x\,dx = \frac{30}{23}x^2\Big|_2^4 = \frac{480}{23} - \frac{120}{23} = \frac{360}{23} \text{ pulgadas-libras}$$

Ejemplo 7.20

Una fuerza de 25 kg alarga un resorte 3 cm. Determine el trabajo requerido para alargar el resorte 2 cm más.

Solución:



Como $F = kx$ y $x = 0,03$ m, cuando $F = 25$ kg, entonces $k = 2500/3$.

El trabajo requerido para alargar el resorte 2 cm más (es decir, hasta 5 cm), está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_{0,03}^{0,05} \frac{2500}{3}\, x\, dx \\ &= \frac{1250}{3}\, x^2 \Big|_{0,03}^{0,05} \\ &= \frac{3,125}{3} - \frac{1,125}{3} \\ &= \frac{2}{3} \text{ kgm} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.21

Determinar el trabajo efectuado al alargar un resorte 6 cm, sabiendo que se necesita una fuerza de 15 kg para alargarlo 1 cm.

Solución:
Según la ley de Hooke $F = kx$, por lo que $15 = k \cdot 0,01$, de donde $k = 1500$.

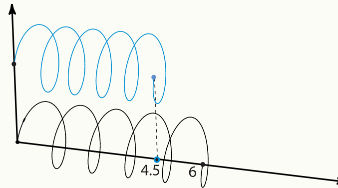
Luego, $F = 1500x$ y el trabajo efectuado para alargar el resorte 0,06 m está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_{0}^{0,06} 1500\, x\, dx \\ &= 750\, x^2 \Big|_{0}^{0,06} \\ &= 2,7 \text{ kgm} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.22

Un resorte tiene una longitud natural de 6cm. Si 1200 dinas lo comprimen 0,5 cm, calcular el trabajo efectuado al comprimirlo desde 0,6 cm hasta 4,5 cm. ¿Qué trabajo se requiere para hacer que el resorte llegue a 9 cm, partiendo de su estado comprimido de 4,5 cm?

Solución:



1. Como $F = kx$ y $x = 0{,}5$ cm cuando $F = 1200$, entonces $k = 2400$. Luego $F = 2400 \cdot x$. El trabajo necesario para comprimir el resorte desde 6 hasta 4,5 cm está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{1,5} 2400\,x\,dx \\ &= 1200\,x^2\Big|_0^{1,5} \\ &= 1200(1{,}5)^2 \\ &= 2700 \text{ ergs} \end{aligned}$$

2. El trabajo que se requiere para hacer que el resorte llegue a 9 cm, partiendo de su estado comprimido de 4,5 cm, está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_{1,5}^{3} 2400\,x\,dx \\ &= 1200\,x^2\Big|_{1,5}^{3} \\ &= 1200 \cdot 9 - 1200 \cdot (1{,}5)^2 \\ &= 8100 \text{ ergs} \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Sherman Stein. *Cálculo con Geometría Analítica.* McGraw-Hill. 1984.

[2] Tom Apostol. *Calculus.* Wiley. 1967

Apéndice A

Créditos

Editado en la Revista digital Matemática, Educación e Internet	
Cálculo Diferencial e Integral (excepto Tasas relacionadas)	
Coordinación general y diseño web:	MSc.Walter Mora F.
Autora:	Licda. Elsie M. Hernández S. Profesora del Instituto Tecnológico de Costa Rica
Encargada de la primera edición impresa	Rosario Alvarez Z.
Edición LaTeX preliminar	Marieth Villalobos J, Alejandra Araya Q., Jessica Chacón P., Luis E. Carrera y Lisseth Angulo.
Edición Web:	Marieth Villalobos J., Alejandra Araya Q, Jessica Chacón P, MSc. Walter Mora F. y Lisseth Angulo
Gráficos 2D:	Marieth Villalobos J., Alejandra Araya Q., MSc. Walter Mora F.
Gráficos 3D y software	MSc. Walter Mora F.
Relaciones Relacionadas	
Autora	MSc. Sharay Meneses R, Profesora del Instituto Tecnológico de Costa Rica
Edición de la primera versión (Word):	MSc. Sharay Meneses R
Edición LaTeX y edición Web:	MSc. Walter Mora F.
Gráficos y software (versión LaTeX y Web)	MSc. Walter Mora F.

*